Curriculum vitæ

Nicolas Prudhon, Maître de conférence
Université de Metz
Bât. A, Ile du Saulcy
57045 Metz

Nationalité française
Né le 11 mars 1975
Vie maritale, un enfant

e-mail. prudhon@univ-metz.fr
page web. http ://poncelet.sciences.univ-metz.fr/~prudhon

Cursus

-2007	Maître de conférence, université de Metz.
2007-2005	ATER, université Louis Pasteur, Strasbourg 1. Pein temps
2005-2003	Postdoctorant, université de Neuchâtel
2003-2000	THESE de Doctorat en Mathématiques, UFR de mathématiques et d'informatique, ULP Strasbourg. Soutenue le 25 Septembre 2003. Titre : « C^*-algèbres de $\mathrm{Sp}(n,1)$ et K-théorie »
2000-1998	DEA de Mathématiques pures, ULP, Strasbourg. Mention Bien. *Enseignements validés* : C^*-algèbres et K-théorie (P.Julg), Courbes elliptiques (N. Schappacher), Fonctions L p-adiques (JP. Wintenberger), Théorie algébrique des nombres, Equations diophantiennes (M. Mignotte), Représentations des groupes p-adiques (H. Carayol)
1998-1992	AGREGATION de Mathématiques (concours et stage), MAITRISE LICENCE, DEUG Sciences

1 Travaux de recherche

« Maximal hypoellipticity and cohomological induction for $\mathrm{U}(p,q)$ »
Preprint, 2007. [Pru07] [lire l'article]

« Métriques positives sur les variétés de drapeaux »
CRAS, 2007 [Pru06] [lire l'article]

« K–theory for the groups $\mathrm{Sp}(n,1)$ »
Journal of Functionnal Analysis, 221(1) :226–249, 2005. [Pru05] [lire l'article]

« C^*–algèbres de $\mathrm{Sp}(n,1)$ et K–théorie »
Thèse de doctorat. *Prépublications de l'IRMA, Strasbourg*, 2003. [Pru03]

2 Résumés des travaux écrits

Les travaux suivants peuvent être envoyés sur demande.

Hypoellipticity and cohomological induction for $\mathrm{U}(p,q)$ [Pru07]

Soit $Y = G/L$ une variété de drapeaux pour un groupe réductif réel G et K un sous-groupe compact maximal de G. En utilisant une distribution tranverse aux fibres de la fibration $G/L \cap K \to Y$, nous définissons un opérateur différentiel équivariant sur $G/L \cap K$ jouant le rôle du laplacien de Dolbeault pour la variété complexe G/L. En dépit du fait que la distribution choisie satisfasse à la condition de Hörmander, nous conjecturons que cet opérateur n'est pas hypoélliptique maximal dans le degré où la cohomologie du complexe de Dolbeault sur G/L est non-nulle. Ce preprint présente une preuve complète de cette conjecrture dans le cas $G = \mathrm{U}(p,q)$ et $L = \mathrm{U}(p') \times \mathrm{U}(p", q)$, où $p' + p" = p$ (ainsi que lorsque G est un groupe de Lie de rang réel 1).

Métriques positives sur les espaces homogènes réductifs [Pru06]

Étant donnés un groupe de Lie semi-simple réel G et un un sous-groupe réductif L de G sur lequel la forme de Killing est non-dégénérée, nous définissons une famille de métriques riemanniennes sur G/L, indexées par les points de G/K, où K est un sous-groupe compact maximal de G. Nous utilisons ces métriques pour généraliser un lemme de Rawnsley, Schmid et Wolf de la théorie des représentations associées aux variétés de drapeaux. De plus, nous montrons que la représentation de G par translation à gauche sur l'espace des formes de carré intégrable sur G/L, n'est pas uniformément bornée.

K**-theory for** $\mathrm{Sp}(n,1)$ [Pru05]

Cet article reprend les chapitres 2 et 3 de ma thèse, tout en les améliorant. A l'aide d'une étude topologique du dual unitaire des groupes $\mathrm{Sp}(n,1)$, nous construisons une suite de composition de la C^*-algèbres maximale d'un tel groupe, permettant le calcul explicite de ses groupes de K-théorie en termes de représentations unitaire de $\mathrm{Sp}(n,1)$. Nous montrons notamment que le morphisme du théorème 2 (voir plus loin) induit une KK-équivalence. Nous calculons ensuite l'image de l'application de Baum-Connes maximale, c'est-à-dire à valeurs dans la K-théorie de la C^*-algèbre maximale.

C^***-algèbres de** $\mathrm{Sp}(n,1)$ **et** K**-théorie**, thèse de doctorat [Pru03]

Cette thèse est consacrée à la K-théorie des C^*-algèbres de groupes, maximales et réduites. Nous nous intéressons ici plus particulièrement aux groupes d'isométries d'un espace hyperbolique quaternionien, $\mathrm{Sp}(n,1)$.

Nous donnons une description explicite de la K-théorie de la C^*-algèbre maximale d'un tel groupe en fonction de certaines de ses représentations unitaires irréductibles, dites séries isolées. Alors que chacune de ces représentations contribue à la K-théorie par une copie des entiers, il faut noter toutes ne sont pas des points ouverts du dual unitaire, muni de la topologie de Fell. Ceci est une conséquence du travail effectué en appendice, dans lequel nous déterminons la structure en idéaux bilatères de la C^*-algèbre maximale.

Ces résultats de K-théorie servent ensuite à calculer l'image de l'application d'assemblage de Baum-Connes, qui à chaque représentation d'un sous-groupe compact maximal, associe l'indice en K-théorie d'un opérateur de Dirac sur l'espace hyperbolique. En utilisant alors des propriétés d'universalité de l'opérateur de Dirac, nous calculons l'indice d'un opérateur défini par H.W. Wong, et lié à la construction géométrique (induction cohomologique) des séries isolées.

Idempotents dans les C^*-algèbres de groupes

Ce texte constitue les notes d'un cours que j'ai donné dans le cadre de l'école doctorale de mathématiques Genève-Neuchâtel au semestre d'hiver 2004-2005. Ce cours contient une introduction aux algèbres de Banach et aux C^*-algèbres, ainsi qu'àleur K-théorie. Ces notions sont utilisées par exemple pour montrer que la C^*-algèbre réduite du groupe libre sur 2 générateurs ne possède pas d'idempotent non-trivial, par la méthode de la trace, puis par la théorie de Kasparov, comme conséquence de la K-moyennabilité. Ce cours s'adresse à des étudiants avancés mais peut également constituer une introduction aux techniques de géométrie non commutative.

Quadriques et classe de similitudes dans $M_2(\mathbb{R})$

J'ai rédigé une série d'exercices corrigés sur les coniques et les quadriques. Cette série s'inspire très largement des exercices proposés par R. Mneimné dans son livre de géométrie [Mne97]. Elle s'adresse à des étudiants de license, voire de master ou préparant les coucours de l'enseignement.

Théorie des nombres et facteurs de type III

Dans mon mémoire de DEA, j'ai repris le début d'un article de J.B. Bost et A. Connes en le généralisant à un corps de nombre quelconque. Une fois les nombres premiers remplacés par les idéaux premiers ou par leur norme , seule la généralisation d'un lemme dû à B. Blackadar demande une attention particulière. Les mêmes phénomènes de brisure spontanée de symétrie que dans l'article originale sont alors observés.

3 Communications et contributions

Février 2008	« Introduction to L^2-torsion » Goupe de travail de l'IRTG, Metz
Janvier 2008	« Réalisations des représentations des groupes semi-simples et K-théorie » Séminaire Groupes de Lie et Analyse Harmonique, Nancy
Octobre 2007	« Le système dynamique non commutatif de Bost-Connes » Groupe de travail en géométrie non commutative. Metz
Octobre 2007	« Théorie des représentations et K-théorie » 9ème Colloquium Interrégional de Mathématiques
Février-Mars 2007	« Hypoéllipticité et induction cohomologique » Séminaire d'analyse fonctionnelle. Besançon. Séminaire. Reims. Séminaire d'analyse harmonique. Caen
Janvier 2007	« Le théorème d'indice local de Connes-Moscocvici, I » Groupe de travail en géométrie non commutative. Metz
Novembre 2006	« Hypoéllipticité et induction cohomologique » Groupe de travail en géométrie non commutative. Metz
Mars-Avril 2006	« Repésentations des groupes de Lie et K-théorie » Séminaire d'analyse fonctionnelle. Besançon Groupe de travail GAAO. Clermont-Ferrand Réunion annuelle du GdR Algèbres d'opérateurs. Luminy Séminaire d'analyse fonctionnelle. Toulouse
Janvier 2006	« Introduction à la conjecture de Baum-Connes, II »

	Groupe de travail en géométrie non-commutative. Metz
Décembre 2005	« Introduction à la conjecture de Baum-Connes, I » Groupe de travail en géométrie non-commutative. Metz
Septembre 2005	« Représentations des groupes de Lie et K-théorie » Workshop. Neuchâtel
Septembre 2005	Cours d' « introduction à la conjecture de Baum-Connes » Neuchâtel
Mars 2005	« Images des applications de Baum-Connes pour $\mathrm{Sp}(n,1)$» Colloque d'analyse harmonique, Nancy-Metz-Strasbourg. Metz Séminaire algèbres d'opérateurs. Orléans.
Janvier 2005	«La C^*-algèbre maximale d'un groupe de surface est résiduellement de dimension finie» (d'après Lubotzki-Shalom [LS04]) Séminaire. Neuchâtel
Décembre 2004	« Idempotents dans les C^*-algèbres de groupes » Cours de l'école doctorale de mathématiques Genève-Neuchâtel
Mai 2004	« Représentations unitaires des groupes réductifs » (d'après S. Salamanca-Riba et D. Vogan [SRV98]) Séminaire. Neuchâtel
Mars 2004	« Représentations de $\mathrm{Sp}(n,1)$ et K–théorie » Colloquium. Clermont-Ferrant
Décembre 2003	« Conjecture de Novikov pour les groupes linéaires » (d'après E. Guentner, N. Higson, S. Weinberger) Séminaire. Neuchâtel
Novembre 2003	« Représentations des groupes de Lie et K–théorie » Colloquium. Neuchâtel
Octobre 2003	«Quadriques et classes de similitudes dans $M_2(\mathbb{R})$» (d'apès R. Mneimné [Mne97])
Septembre 2003	« C^*–algèbres de $\mathrm{Sp}(n,1)$ et K–théorie » Soutenance de thèse. Strasbourg
Juillet 2003	« C^*–algèbres de $\mathrm{Sp}(n,1)$ et K–théorie » Ecole d'été « Groupes discrets, espaces et algèbres d'opérateurs ». Paris
Mai 2003	« K–theory of the full C^*–algebra of $\mathrm{Sp}(n,1)$ » Journées algèbres d'opérateurs, groupes et K-théorie. Orléans
Janvier 2003	« K-théorie et Représentations de $\mathrm{Sp}(n,1)$ » Séminaire algèbres d'opérateurs. Neuchâtel
Septembre 2002	« Representations of semi-simple groups and K-theory » International Conference on Harmonic Analysis. Luxembourg- Metz
Avril 2002	« Séries discrètes et K-théorie » (d'après V. Lafforgue [Laf02a]) Séminaire Jeunes en algébres d'opérateurs. Paris
Mars 2002	« C^*-algèbre maximale de $\mathrm{Sp}(n,1)$ et K-théorie » Réunion annuelle du Groupement de Recherche en algèbres d'opérateurs Marseille
Janvier 2002	« Représentations de $\mathrm{Sp}(n,1)$ » (d'après W. Baldoni-Silva [BS81]) Séminaire algèbres d'opérateurs. Orléans
Janvier 2001	« C^*-algèbres de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ » Séminaire algèbres d'opérateurs. Orléans
Mai 2000	« Théorie statistique des nombres et facteurs de type III »

Mémoire de DEA. Strasbourg

4 Formations complémentaires

Mai 2005	Oberwolfach seminar « Topological K-theory for Noncommutative Algebras and Applications » MFO, Oberwolfach
Juin 2004	Summer school « Representation theory and complex analysis » CIME, Venise
Janvier 2004	Géométrie non-commutative en mathématiques en physique Introductory five minicourses (first week). CIRM, Luminy
Juillet 2003	École d'été « Groupes discrets, espaces et algèbres d'opérateurs » Paris
Mai 2002	Summer school on the Baum-Connnes conjecture.Göttingen
Septembre 2001	Summer school on the « Baum-Connes conjecture and quantum groups ». Varsovie
Juin 2001	Colloque « Actions sur les frontières et actions moyennables ». Orléans

5 Activités d'Enseignement

Cours intégrés, Licence $1^{\text{ère}}$ année **2005-2007**

Le fonctionnement en "cours intégré" consiste à répartir toutes les tâches d'enseignement, cours et travaux dirigés, entre les enseignants. J'ai ainsi pu présenter un cours magistral, ainsi que conduire les séances de travaux dirigés l'accompagnant, devant des groupes restreint d'une trentaine d'étudiants. Cette exérience m'a permis de mieux appréhender l'articulation entre le cours et les applications, en dispensant un enseignement à la fois personnel et concerté avec les autres enseignants chargés du cours intégré auprès d'autres groupes. Combinée avec un contrôle continu des connaissances, l'expérience du cours intégré me pemet de suivre au plus près la progression des étudiants. Dans cet esprit, j'ai également pris l'initiative en 2005-2006 de distribuer des "devoirs à la maison". Il m'est alors apparu que ce travail supplémentaire demandé aux étudiants leur apportait beaucoup, et c'est naturellement que cette expérience s'est renouvelée en 2006-2007. Actuellement, les devoirs à la maison ont un rhytme bimensuel voire hebdomadaire, et sont pris en compte dans la note de contrôle continu. L'impact en terme de présence aux cours et de progrès des étudiants est considérable.

Le programme du cours d'analyse (2005-2006 et 2006-2007) était : nombres complexes, notion de limite, notion de continuité, notion de dérivabilité, étude des fonctions réelles d'une variable réelle, théorème des accroissements finis, convexité, équations différentielles linéaires du premier et second ordre. Au cours de second semestre 2006-2007, j'ai également l'occasion de renouveler cette expérience dans un cours d'algèbre ayant pour programme : matrices, systèmes, déterminants, espaces vectoriels, applications linéaires, valeurs et vecteurs propres, changements de base.

Introduction à la conjecture de Baum-Connes **Septembre 2005**
École doctorale de mathématiques Genève-Neuchâtel

Ce cours d'introduction à la conjecture de Baum-Connes a eu lieu en parallèle avec un cours donné par Alain Valette. L'objectif était de présenter les bases de la K-théorie des algèbres de Banach, et de la K-théorie bivariante de Kasparov pour les C^*-algèbres. Les principales notions et résultats nécessaires à la définition, à la motivation (théorie de l'indice), ainsi qu'à l'étude de certains exemples, de la conjecture de Baum-Connes ont été présentés. Le public était constitué majoritairement de doctorants et de post-doctorants, mais également de chercheurs curieux du sujet.

Introduction à la conjecture de Baum-Connes **Semestre d'hiver 2004 / 2005**
École doctorale de mathématiques Genève-Neuchâtel

Ce cours a été une introduction à la K-théorie et aux C^*-algèbres de groupes. Suffisamment d'éléments de ces théories ont été introduits et démontrés, pour que la conjecture de Kaplanski-Kadison pour les groupes libres soit étudiée par deux approches sensiblement différentes : l'une utilisant le trace naturelle sur la C^*-algèbre réduite, d'après une méthode d'Alain Connes ; et l'autre dans l'esprit de la KK-théorie et de la méthode Dirac-dual Dirac. Vous pouvez, si vous le désirer, vous faire une idée plus précise du contenu du cours en téléchargeant mes notes sur ma page internet.

Monitorat CIES Alsace **2000 - 2003**

Enseignements dispensés : Algèbre linéaire, analyse (1ère et 2ième année)
En algèbre, j'ai enseigné aux étudiants de première et deuxième année : espaces vectoriels, endomorphismes d'un espace vectoriel, pivot de Gauss, valeurs propres, réduction des endomorphismes. Concernant l'analyse, j'ai dispensé des travaux dirigés an deuxième année, le programme portant sur les développements limités et l'intégration. J'ai également conduit des travaux dirigés de géométrie dans l'espace ($1^{\text{ère}}$ année). Ce cours de premier semestre de DEUG se voulait une introduction à l'algèbre linéaire à travers la géométrie vectorielle, affine, et euclidienne de l'espace à trois dimensions.

Exercices corrigés
J'ai rédigé une série d'exercices corrigés sur les coniques et les quadriques. Cette série s'inspire très largement des exercices proposés par R. Mneimné dans son livre [Mne97]. Elle est proposée à des étudiants préparant les concours ou désirant élargir leur culture scientifique et mathématique, en abordant un sujet peu enseigné, mais très formateur.

Suivi scolaire dans le cadre du service national **1998 - 2000**
Stage d'agrégation **1997 / 1998**

Ces expériences d'enseignement à tous les niveaux du primaire et du secondaire m'ont permis d'avoir une vision globale et précise des programmes d'enseignements, en particulier en mathématiques, avant l'arrivée à l'université. Ces expériences très enrichissantes m'ont permis de réaliser très clairement un chose, qui peut ne sembler être qu'une remarque de bon sens : les élèves, mais cela reste valable pour les étudiants, ne connaissent que les éléments théoriques qui leur ont été enseignés, et n'améliorent leur technique de calcul qu'avec une pratique assidue.
Durant mon stage d'agrégation j'ai pu, au cours d'une année entière, enseigner les mathématiques à une classe de seconde. J'ai alors appris, sur les conseils avisés de mes différents interlocuteurs à l'IUFM de Strasbourg, à construire une séquence d'apprentissage adaptée à une classe hétérogène et respectant les exigences des programmes. Cette expérience m'a également permis de connaître mieux la structure IUFM et le fonctionnement de l'Éducation Nationale.

6 Activités de Recherche

Soit G un groupe localement compact dénombrable à l'infini. Nous nous intéressons à la **conjecture de Baum-Connes** et plus généralement à la K-théorie de la C^*-algèbre maximale $C^*_{\max}(G)$ de G. Cette C^*-algèbre est la C^*-algèbre enveloppante de l'algèbre de Banach involutive $L^1(G)$. L'action par convolution à gauche de cette algèbre sur l'espace de Hilbert $L^2(G)$ définit un homomorphisme involutif $\lambda\colon L^1(G) \to \mathcal{L}(L^2(G))$. La C^*-algèbre réduite $C^*_{\text{red}}(G)$ de G est l'adhérence de l'image de $L^1(G)$ pour la norme des opérateurs. Ainsi nous obtenons un morphisme de C^*-algèbres, encore noté λ,

$$\lambda \colon C^*_{\max}(G) \to C^*_{\mathrm{red}}(G)\,.$$

La conjecture de Baum-Connes [BC00] prédit ce que doit être la K-théorie de $C^*_{\mathrm{red}}(G)$. Plus précisément P. Baum, A. Connes et N. Higson [BCH94] construisent un homomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules, l'application d'assemblage μ_{red}, d'un obje$>$t géométrique (la K-homologie équivariante à support compact $K_*^G(\underline{E}G)$ de l'espace classifiant $\underline{E}G$ des actions propres de G) vers la K-théorie de $C^*_{\mathrm{red}}(G)$ et conjecturent que c'est un isomorphisme. Cette application μ_{red} se factorise par $\mu_{\max}$ à travers la K-théorie de $C^*_{\max}(G)$ via le morphisme λ_* induit par λ en K-théorie. En d'autres termes, nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & K_*(C^*_{\max}(G)) \arrow[d, "\lambda_*"] \\ K_*^G(\underline{E}G) \arrow[ur, "\mu_{\max}"] \arrow[r, "\mu_{\mathrm{red}}"'] & K_*(C^*_{\mathrm{red}}(G))\,. \end{tikzcd} \tag{1}$$

Une des difficultés dans la compréhension de l'application de Baum-Connes est que l'application d'assemblage $\mu_{\max}$ n'est pas un isomorphisme en général. La question de Baum-Connes est donc aussi celle de distinguer les deux groupes de K-théorie. Ce point de vue nous conduit au questionnement suivant. Celui-ci fait également suite aux résultats que j'ai obtenus dans ma thèse.

Soit G un groupe de Lie linéaire connexe semi-simple et K un sous-groupe compact maximal. Alors l'espace G/K est un modèle pour $\underline{E}G$ et (supposons que K est simplement connexe) la K-homologie équivariante est l'anneau des représentations $R(K)$ de K, vu comme $\mathbb{Z}$-module. L'application d'assemblage associe à toute représentation (V, σ) de K, l'indice dans $C^*_{\max}(G)$ d'un opérateur de Dirac tordu par la représentation σ. En général, lorsque G possède la propriété (T) de Kazhdan, $C^*_{\max}(G) = \mathbb{C} \oplus A$ et la classe de l'idempotent $(1, 0)$ dans $K_0(C^*_{\max}(G))$ est dans le noyau de λ_*. En particulier, $\mu_{\max}$ n'est pas un isomorphisme. Nous désirons étudier le cas de ces groupes, qui est intéressant car ils possèdent pour la plupart la propriété (T) et parce que l'approche par l'analyse harmonique (théorie des représentations) est possible. Nous espérons construire des éléments de $K_0(C^*_{\max}(G))$ qui ne sont pas dans l'image de $\mu_{\max}$ à partir de sous-groupes de Lie possédant la propriété (T). Un tel programme s'incrit dans celui plus général d'élaborer une **conjecture de Baum-Connes pour la C^*-algèbre maximale**. Dans le cadre des groupes de Lie semi-simples, ce programme peut en partie être ramener à celui de la construction géométrique de leur représentation unitaire. Ce point de vue nous conduit à étudier l'induction cohomologique.

Résumé de la thèse

L'objet principal de ma thèse est le calcul de la K-théorie de la C^*-algèbre maximale des groupes $G = \mathrm{Sp}(n, 1)$, $n \geq 2$. Ce calcul repose sur une connaissance explicite des repésentations unitaires irréductibles de G. Ensuite, nous décrivons l'image de l'application de Baum-Connes $\mu_{\max}$ en fonction de la description obtenue.

Les travaux de W. Baldoni Silva [BS81] donnent une classification du dual unitaire des groupes $G = \mathrm{Sp}(n, 1)$ $(n \geq 2)$ et mes résulats sont basés sur cette classification. Le théorème de classification de Langlands ([Kna01, théorème 8.54]) des représentations admissibles irréductibles de G affirme que ces représentations sont à isomorphismes près : les séries discrètes, les séries principales unitaires, les limites (non dégénérées) de séries discrètes, et les quotients de Langlands . Les séries discrètes sont par définition les représentations irréductibles dont les coefficients sont de carré intégrable. Soit $G = KAN$ une décomposition de Cartan de G et soit M le centralisateur de A dans K. Alors $P = MAN$ est un sous-groupe parabolique minimal de G. Les séries principales unitaires sont les représentations induites irréductibles $\pi_{\xi,\nu} = \mathrm{ind}_P^G\, \xi \otimes e^{\nu} \otimes 1$, où $\xi \in \hat{M}$ est une représentation irréducible de M et

$e^\nu \in \hat{A}$ est un caractère unitaire de A. Une représentation $\pi_{\xi,\nu}$ ne peut être réductible que si $\nu = 0$, et alors cette représentation $\pi_{\xi,0}$ est une somme directe de deux représentations irréductibles unitaires. Ce sont les limites de séries discrètes que nous considérons ici. Si $e^\nu \notin \hat{A}$ mais $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \simeq \mathbb{C}$ (le dual de l'algèbre de Lie complexifiée de A) et $\mathrm{Re}(\nu) > 0$, on peut également construire les représentations $\pi_{\xi,\nu}$. Sous cette condition sur ν, ces représentations possèdent un unique quotient irréductible appelé quotient de Langlands, noté $J_{\xi,\nu}$. Les trois premières séries sont toujours unitaires et leur réunion est le spectre de la C^*-algèbre réduite. Pour classifier le dual unitaire, il nous reste à identifier les quotients de Langlands unitarisables. Les résultats de W. Baldoni Silva dont nous avons besoin sont les suivants.

Théorème 1. *[BS81] Soit $\xi \in \hat{M}$. Si $J_{\xi,\nu}$ est unitarisable alors $\mathrm{Im}(\nu) = 0$ et si $\pi_{\xi,0}$ est réductible alors $J_{\xi,\nu}$ n'est pas unitarisable. De plus, si $\pi_{\xi,0}$ est irréductible deux cas peuvent se produire.*

1. *il existe $\nu(\xi) > 0$ tel que $J_{\xi,\nu}$ soit unitarisable, si et seulement si $0 < \nu \leq \nu(\xi)$*
2. *il existe $\nu(\xi) > 0$ tel que $J_{\xi,\nu}$ soit unitarisable, si et seulement si $0 < \nu \leq \nu(\xi)$ ou $\nu = \nu(\xi)+1$.*

Les quotients de Langlands unitarisables $J_{\xi,\nu(\xi)+1}$ sont appelés séries « isolées ». Nous pouvons maintenant énoncer le premier théorème que j'ai montré. Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des représentations isolées. Rappelons que toute représentation unitaire π de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$ fournit un morphisme

$$C^*_{\max}(G) \xrightarrow{\pi} \mathcal{K}(\mathcal{H}_\pi)\,,$$

où $\mathcal{K}(\mathcal{H}_\pi)$ est l'idéal des opérateurs compacts.

Théorème 2. *Le morphisme*

$$C^*_{\max}(G) \xrightarrow{\lambda \oplus (\oplus\pi)} C^*_{\mathrm{red}}(G) \oplus \left(\bigoplus_{\pi \in \mathcal{I}} \mathcal{K}(\mathcal{H}_\pi) \right)\,. \tag{2}$$

est bien défini et induit un isomorphisme en K-théorie.

Rappelons encore que $K_0(\mathcal{K}(\mathcal{H})) = \mathbb{Z}$ et $K_1(\mathcal{K}(\mathcal{H})) = 0$.

Corollaire 3. *Soit $n > 2$. Le noyau de λ_* est un $\mathbb{Z}$-module libre, possédant un ensemble de générateurs en correspondance bijective avec l'ensemble $\mathcal{I}$ des séries « isolées ».*

La démonstration de ce théorème repose sur une filtration du dual unitaire, qui est possible grâce au résultat suivant de théorie des groupes semi-simples [Kna01, prop. 8.61] : si un quotient de Langlands unitaire $J_{\xi',\nu'}$ apparaît comme sous-quotient d'une série $\pi_{\xi,\nu(\xi)}$, alors $\nu' < \nu(\xi)$. En particulier, la connaissance explicite des sous-quotients de $\pi_{\xi,\nu(\xi)}$ [BSK80] n'est pas ici nécessaire (bien qu'elle le soit pour montrer le théorème 1).

La question est alors celle de faire le lien avec les applications d'assemblage μ_{red} et $\mu_{\max}$. Il est connu que μ_{red} est un isomorphisme [Laf02b]. En particulier, il suit que

$$K_*(C^*_{\max}(G)) = \mathrm{Im}(\mu_{\max}) \oplus \mathrm{Ker}(\lambda_*)\,.$$

La question est donc de décrire le graphe de l'application suivante.

$$K_0(C^*_{\mathrm{red}}(G)) \xrightarrow{(\oplus\pi_*) \circ \mu_{\max} \ \circ \mu_{\mathrm{red}}^{-1}} \oplus_{\pi \in \mathcal{I}} \mathbb{Z}\,,$$

C'est le second résultat de ma thèse dont je veux parler.

Théorème 4. *Soit $\pi \in \mathcal{I}$. Alors il existe un nombre fini non nul de représentations $\rho \in \hat{K}$ telles que $\pi_* \circ \mu_{\max}(\rho) \neq 0$, et dans ce cas $\pi_* \circ \mu_{\max}(\rho) = \pm 1$.*

Induction cohomologique

Une suite possible dans l'étude de la K-théorie de la C^*-algèbre maximale serait de construire géométriquement les éléments de $K_*(C^*_{\max}(G))$ qui ne sont pas dans l'image de l'application d'assemblage $\mu_{\max}$. L'idée générale est d'associer à un operateur différentiel G-équivariant et élliptique son G-indice, la K-théorie de la C^*-algèbre maximale étant le réceptacle naturel pour de tels indices. Afin d'expliquer en détail ce problème, nous rappelons pour commencer la définition de $\mu_{\max}$ (dans le cas des groupes de Lie semi-simples), qui, en résumé, réalise ce programme lorsque l'opérateur différentiel est défini sur une variété sur laquelle le groupe G agit proprement.

Le point fondamental sur lequel repose la construction de l'application d'assemblage est le théorème suivant, qui définit l'indice. Rappelons qu'une G-variété propre M est variété riemannienne munie d'une action isométrique de G telle que l'application $M \times G \to M \times M$, $(x, g) \mapsto (x, gx)$, soit propre .

Théorème 5. *[Kas83] Soit D un opérateur différentiel elliptique G-invariant agissant sur les sections lisses d'un fibré hermitien G-équivariant E sur une G-variété* propre *M, tel que $G\backslash M$ soit compact. Alors D détermine un élément* $\mathrm{ind}_a(D) \in K_*(C^*_{\max}(G))$.

Dans le cas d'un groupe de Lie semi-simple, le groupe géométrique $K^G_*(\underline{E}G)$ est isomorphe à l'anneau des représentation $R(K)$ du sous-groupe compact maximal K de G, considéré comme groupe abélien. Soit S la représentation spinorielle de $\mathrm{Spin}(N)$, pour $N = \dim(G/K)$. Si K est simplement connexe alors l'action isométrique de K sur l'espace tangent à l'origine de G/K se relève en un morphisme $K \to \mathrm{Spin}(N)$, et S est ainsi un K-module. Soit V une représentation irréductible de K, et formons le fibré vectoriel $\mathcal{S} \otimes \mathcal{V}$ sur G/K associé à $S \otimes V$. C'est un fibré vectoriel hermitien G-équivariant. Soit $\mathcal{D}_V$ l'opérateur de Dirac. Alors $\mathcal{D}_V$ est un opérateur différentiel elliptique G-invariant du premier ordre sur $\mathcal{S} \otimes \mathcal{V}$. Le théorème suivant de Kasparov permet de construire un élément de $K_*(C^*_{\max}(G))$. Le morphisme d'assemblage $\mu_{\max}$ est alors défini par

$$\mu_{\max}(V) = \mathrm{ind}_a(\mathcal{D}_V)$$

où cette formule est ensuite étendue additivement à $R(K)$. Le fait que l'action de G sur M soit propre nous permet de définir sur l'espace des sections lisses à support compact de $\mathcal{S} \otimes \mathcal{V}$ une structure de module préhilbertien sur l'algèbre involutive des fonctions sur G lisses à support compact. Nous complétons cet espace pour la norme de $C^*_{\max}(G)$ pour obtenir un C^*-module $\mathcal{E}$ sur $C^*_{\max}(G)$. Dans le langage de Baaj-Julg [BJ83], l'élément $\mathrm{ind}_a(\mathcal{D}_V)$ dans le théorème précédent est décrit par l'élément de Kasparov non borné $(\mathcal{E}, \mathcal{D}_V)$.

Le lien avec la théorie des représentations est alors bien compris. En considérant les sections L^2 du fibré $\mathcal{S} \otimes \mathcal{V}$, M.F. Atiyah et W. Schmid [AS77] montrent que lorsque $\dim(G/K)$ est paire (au choix près d'une orientation sur l'espace tangent à l'origine de G/K, et d'une condition de positivité sur le plus haut poids de V), alors le noyau de l'opérateur de Dirac est l'espace d'une représentation irréductible de G qui est dans la série discrète et que toute représentation de la série discrète apparaît exactement une fois de cette façon. Le lien avec l'élément de Kasparov non borné précédent $(\mathcal{E}_V, \mathcal{D}_V)$ est que l'espace des sections L^2 de notre fibré est le produit tensoriel $\mathcal{E}_V \hat{\otimes} L^2(G)$ au dessus de $C^*_{\max}(G)$ et l'opérateur de Dirac sur les sections L^2 coïncide avec l'opérateur $\mathcal{D}_V \otimes 1$. Il est important de noter que cette réalisation géométrique des séries discrètes a historiquement beaucoup contribué aux définitions des morphismes d'assemblage μ_{red} et $\mu_{\max}$.

Revenons maintenant à la K-théorie de la C^*-algèbre maximale et aux représentations « isolées » de $\mathrm{Sp}(n, 1)$. Ce qui précède suggère qu'il serait utile d'avoir une construction géométrique de ces représentations. C'est ce problème que tente d'aborder la théorie de l'induction cohomologique.

En combinant des résultats de H.W. Wong [Won93] et un travail W. Baldoni-Silva et D. Barbash [BSB83] nous obtenons facilement le résultat suivant. Pour $1 \le m \le n$, définissons le sous-groupe de Lie L_m de G, en posant,

$$L_m = \mathbb{T}^{n-m} \times Sp(m, 1)\,.$$

Alors G/L_m possède une structure complexe G-invariante, ainsi qu'une mesure G-invariante. Ces variétés sont des exemples de variétés de drapeaux pour le groupe G.

Définition 6. *Soient G un groupe de Lie réductif réel, $G^{\mathbb{C}}$ le groupe complexifié, et Q un sous-groupe parabolique de $G^{\mathbb{C}}$. Une G-variéteé de drapeaux est une G-orbite ouverte dan s $G^{\mathbb{C}}/Q$ qui possède en outre une mesure invariante.*

Théorème 7. *Soit G/L une variété de drapeaux, et χ caractère unitaire de L. Soit $s = \frac{1}{2}\dim(K/L_m \cap K)$. Considérons le complexe de Dolbeault sur le fibré en droites holomorphe $\mathcal{L}_\chi$ sur G/L_m, associé à χ. Soit encore $H^*(G/L_m;\mathcal{L}_\chi)$ la cohomologie C^∞ de ce complexe. Alors $H^s(G/L_m;\mathcal{L}_\chi)$ est une représentation irréductible admissible de G sur un espace de Fréchet. Pour $G = \mathrm{Sp}(n,1)$, $H^s(G/L;\mathcal{L}_\chi)$ est infinitésimalement équivalente à une série « isolée » lorsque le module de Harish-Chandra sous-jacent est infinitésimalement unitaire, si et seulement si L possède la propriété (T) de Kazhdan (par exemple si $L = L_m$, $m \geq 2$). De plus, toute série « isolée» est obtenue de cette façon.*

Notons que les variétés G/L, $L = L_m$, ne possèdent pas de structure riemannienne G-invariante, et que l'action de G sur ces variétés n'est pas propre. Nous ne pouvons donc pas appliquer le théorème 5, ni donc définir de cette façon un élément de $K_*(C^*_{\max}(G))$. D'autre part, le fait que μ_{red} soit un isomorphisme signifie que les actions propres produisent des éléments de K-théorie qui sont contenus dans l'image de $\mu_{\max}$. Néanmoins, les variétés complexes G/L possèdent une métrique hermitienne non dégénérée, G-invariante, qui n'est pas définie positive, et une métrique hermitienne définie positive qui n'est pas G-invariante. Toutes deux sont définies grâce à la forme de Killing sur G. Nous pensons qu'en prenant en compte ces données géométriques, il est possible de définir des éléments de K-théorie de $C^*_{\max}(G)$.

Ce programme peut être décomposé en trois étapes.

1. Nous devons construire un opérateur non-borné $\overline{\partial} + \overline{\partial}^*$, comme élément de $K^G_*(G/L_m)$,
2. et construire une application d'assemblage
$$K^G_*(G/L_m) \xrightarrow{\mu_m} K_0(C^*_{\max}(G)) \,.$$
3. Enfin, il faudra vérifier que l'image dans $K_0(C^*_{\max}(G))$ de cet élément de K-homologie n'est pas dans l'image de $\mu_{\max}$ lorsque $m \geq 2$, et que l'application $\oplus\mu_m$ est surjective.

Notons que le groupe $K^G_*(G/L_m)$ est connu pour $m = 0$ ($L_0 = \mathbb{T}^{n+1}$), car l'action est propre et dans ce cas l'application μ_0 est bien définie et son image coïncide avec celle de $\mu_{\max}$. Soient $[1_G]$ l'élément de la K-théorie de $C^*_{\max}(G)$ donné par la propriété (T), et j_G l'application de descente en K-théorie bivariante. Nous pouvons alors définir le morphisme μ_m pour $L_m = G$ de la façon suivante.
$$K^G_*(\mathrm{pt}) \ni x \longmapsto [1_G] \otimes j_G(x) \in K_*(C^*_{\max}(G)) \,.$$
Nous voyons alors que l'élément trivial de $K^G_*(\mathrm{pt})$ a pour image $[1_G]$ qui n'est pas dans l'image de $\mu_{\max}$. Nous définissons alors l'application μ_m pour les autres valeurs de m ($m = 2, \ldots, n-1$) de la façon suivante. Notons encore $[1_{L_m}]$ les éléments de K-théorie associés aux représentations triviales des groupes $L_m, m \geq 2$.
$$K^G_*(G/L_m) \ni x \xmapsto{\mu_m} [1_{L_m}] \otimes j_G(x) \in K_*(C^*_{\max}(G)) \,.$$
Il est légitime d'espérer que le point 3. sera vérifié.

Pour le premier pas, nous pouvons préciser la difficulté du problème en construisant un élément $\beta^G_L \in KK^G(C_0(G/L), C_0(G/L \cap K))$ de la façon suivante. Considérons la fibration
$$G/L \cap K \xrightarrow{\pi} G/L \,,$$
dont les fibres sont isométriques à l'espace riemannien symétrique $L/L \cap K$.

Lemme 8. *(Mostow) L'application*

$$\begin{array}{ccc} K \times \mathfrak{l}^{\perp} \cap \mathfrak{p}_0 \times \mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}_0 & \longrightarrow & G \\ (k, X, Y) & \longmapsto & k \exp X \exp Y \end{array}$$

est un difféomorphisme.

Il suit que la fibration π possède une section K-équivariante définie par

$$\begin{array}{rcl} \sigma \colon G/L & \longrightarrow & G/L \cap K \\ g \cdot L & \longmapsto & k(g) \exp(X(g)) \cdot L \cap K\,. \end{array}$$

Tout d'abord, notons que cette application n'est pas G-équivariante. Néanmoins, $L/L \cap K$ possède une spin-structure invariante. Cela signifie que l'espace des spineurs associés à l'espace euclidien $T_{eL}L/L \cap K$ est un $L \cap K$-module. Nous considérons le fibré S^G sur $G/L \cap K$ associé à ce $L \cap K$-module. Soit $\Gamma_0(G/L \cap K, S^G)$ l'espace des sections de ce fibré tendant vers zero à l'infini. De la même façon, l'action de $L \cap K$ sur $T_{eL}G/L \cap K$ est définie sur le fibré V des vecteurs longitudinaux . Soit X le champ de vecteurs défini comme suit. Pour $y \in G/L \cap K$, le vecteur X_y est l'unique vecteur de V_y de norme 1, tangent à la géodésique dans la fibre de y pointant vers le point base $\sigma(\pi(y))$. Ce vecteur est défini pour $y \neq \sigma(\pi(y))$. Modifions cette définition en multipliant X par une fonction valant 0 sur un voisinage tubulaire $\mathcal{V}$ de l'image de σ, et 1 en dehors d'un voisinage tubulaire $mathcalW \subset \mathcal{V}$. On peut ainsi définir X partout. La multiplication de Clifford c_X par X dans $\Gamma_0(G/L \cap K, S^G)$ définit un $C_0(G/L), C_0(G/L \cap K))$-module de Kasparov. Il n'est pas évident a priori que cet élément soit équivariant.

Proposition 9. *L'élément $\gamma_L^G \in KK^G(C_0(G/L), C_0(G/L \cap K))$ est équivariant.*

Démonstration. Soient $g \in G$ et $f \in C_0(G/L)$. Nous devons montrer que la multiplication par $f(g \cdot X - X)$ est un morphisme compact du $C_0(G/L \cap K)$-module $\Gamma(G/L \cap K, S^G)$. Soit $y = gL \cap K$. Fixons une isométrie de la fibre contenant y avec $L/L \cap K$ envoyant $\sigma(\pi(y))$ sur $e \cdot L \cap K$. Les champs de vecteurs $g \cdot X$ et X diffèrent par l'action de l'élément

$$\exp\left(Y(g^{-1}k(gy)\exp(X(gy)))\right) \cdot L$$

sur la fibre contenant y. Il reste alors à montrer que cet élément appartient à une partie compacte de L, qui ne dépend pas de y, mais seulement de g. Ceci est exactement ce qui est montré dans la démonstration de [Pru06, proposition 1]. □

Remarque 10. *Le choix d'un point base x dans l'espace symétrique G/K détermine une section σ_x de la fibration π_L comme cela est défini dans [Pru06], tel que $\sigma = \sigma_{eK}$. L'élément β_L^G ne dépend pas de la section choisie. De plus, si $\|\cdot\|_{G/L\cap K}$ est une métrique invariante sur $G/L \cap K$, la formule*

$$\|X_y\|_x \colon = \|d_y\sigma_x(X_y)\|_{G/L\cap K} \tag{3}$$

détermine, pour tout $x \in G/K$ donné, une métrique sur G/L. Cette famille est équivariante au sens suivant :

$$\|gX_y\|_{gx} = \|X_y\|_x\,. \tag{4}$$

Cet élément permet de construire des éléments équivariants de la K-homologie de G/L, en faisant le produit avec des éléments de $KK^G(C_0(G/L \cap K), \mathbb{C})$ sur la droite. Cependant, cela produit des éléments de K-homologie dans l'image du morphisme induit en K-homologie par la multiplication à gauche par $\mathrm{ind}_L^G \gamma_L \in KK^G(C_0(G/L), C_0(G/L))$, où γ_L est l'élément γ pour L. L'image d'un tel élément par l'application μ_m est donc nul. Le projet décrit ici revient donc à construire un élément du groupe $K_*^G(G/L)$ qui n'est pas dans l'image de l'application

$$K_*^G(G/L \cap K) \ni x \mapsto x \otimes \beta_L^G \in K_*^G(G/L)\,.$$

Il me paraît néanmoins intéressant de réaliser ces éléments comme opérateurs pseudodifférentiels sur $G/L\cap K$, en faisant apparaître l'élément γ_L sur la fibre. En utilisant alors une homotopie dans $KK^{ban}_{G,\ell}(C_0(G/L),\mathbb{C})$ entre l'élément γ_L et la représentation triviale de L, on peut espérer obtenir des éléments plus intéressants.

Ce programme est assez semblable à celui qui consiste à unitariser les $(\mathfrak{g},K)$-modules sous-jacents aux représentations $H^s(G/L,\mathcal{L}_\chi)$. Pour cela, on considére la métrique positive et la métrique invariante mentionnées précédemment. Notons $L^2_{\mathrm{pos}}(G/L,\mathcal{L}_\chi)$ les sections L^2 du complexe de Dolbeault, et $\partial^{*,\mathrm{inv}}$ l'adjoint de l'opérateur de Dolbeault pour la forme invariante, et soit

$$\mathcal{H}^s_2 = L^2(G/L,\mathcal{L}_\chi)\cap \ker\partial\cap\ker\partial^{*,\mathrm{inv}}\,.$$

On conjecture alors que toutes les classes de cohomologie sont représentés dans $\mathcal{H}^s_2$, que la représentation de G sur $\mathcal{H}^s_2$ est continue et bornée, et que la forme invariante est positive (non définie) sur cet espace. L. Barchini et R. Zierau [BZ98] ont construit des formes dans $\ker\partial\cap\ker\partial^{*,\mathrm{inv}}$, mais ne sont pas parvenus à montrer de manière générale que ces formes étaient L^2 , et que la représentation de G était continue. L'interprétation de la métrique positive que j'ai donnée dans [Pru06] m'a déjà permis de montrer cette dernière propriété. On peut espérer que cette construction permettra également de montrer que les formes construites par Barchini et Zierau sont de carré intégrable. Un objectif important est alors de faire le lien entre la famille équivariante de métriques riemanniennes et la métrique pseudo-riemannienne invariante.

Cependant, il n'est pas clair que si ce programme est réalisé on puisse définir à partir du couple G-équivariant $(G/L,\mathcal{H}^s_2)$ un élément de K-théorie dans $K_*(C^*_{\max}(G))$. En effet, le laplacien

$$\square^{\mathrm{inv}} = \overline{\partial}\,\overline{\partial}^{*,\mathrm{inv}} + \overline{\partial}^{*,\mathrm{inv}}\overline{\partial}$$

n'est pas élliptique. Pour remédier à cela, j'ai introduit dans [Pru07] un opérateur différentiel G-équivariant sur $G/L\cap K$, qui, après restriction à G/L, doit jouer le rôle du laplacien de Dolbeault. La construction de cet opérateur est assez facile. Comme la variété $G/L\cap K$ est G-propre, nous la munissons d'une métrique Riemannienne invariante. Nous définissons alors le sous-fibré E du fibré tangent à $G/L\cap K$ comme l'orthogonal de l'esapce tangent aux fibres de la fibration $G/L\cap K\to G/L$. Ce sous-fibré permet de définir canoniquement un opérateur différentiel, encore noté $\overline{\partial}$, sur $G/L\cap K$ qui coïncide avec l'opérateur de Dolbeault sur les sections constantes le long des fibres, et dont l'expression locale ne contient que des dérivées le long de E. Utilisant encore la métrique invariante sur $G/L\cap K$, nous pouvons définir

$$\square = \overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}\,.$$

Comme le sous-fibré E vérifie la condition de Hörmander à l'ordre 2, ce qui signifie que l'homomrphisme de fibré

$$[\,,\,]:\ \wedge^2 E\to (TG/L\cap K)/E\,,$$

est surjectif, il y a un "risque" que l'opérateur $\square$ soit hypoélliptique maximal, c'est-à-dire que $\square$ permette le contrôle de toutes les dérivées jusqu'à l'ordre 2. L'opérateur $\square$ déterminerait alors une algèbre différentiel au sens de N. Higson, ruinant ainsi nos espoirs puisque G agit proprement sur $G/L\cap K$. La première chose à montrer consiste donc à s'assurer que l'opérateur $\square$ n'est pas hypoélliptique maximal. Nous montrons dans [Pru07] qu'il ne l'est effectivement pas lorsque G est un groupe de Lie réductif de rang réel 1, et également lorsque $G=\mathrm{U}(p,q)$ et $L=\mathrm{U}(p')\times\mathrm{U}(p'',q)$, $p'+p''=p$. Il est donc légitime de conjecturer que $\square$ n'est jamais hypoélliptique maximal. La preuve d'un tel résultat dans le cas général se heurte pour le moment à des difficultés concernant la combinatoire des systèmes de racines. Un tel résultat de non-hypoéllitpticité signifie que le noyau L^2 de cet opérateur est très grand. Néanmoins, si l'on considère la restriction $\square_{G/L}$ de cet opérateur aux sections constantes le long des fibres, on observe alors que

$$\ker\square_{G/L} = \bigcap_{x\in G/K}\ker\square_x\,,$$

où $\square_x$ est le laplacien élliptique non-équivariant sur G/L associé à l'opérateur de Dolbeault via la métrique $\| \|_x$. En particulier, le noyau de $\square_{G/L}$ n'est pas trop grand. Les deux noyaux $\ker \square$ et $\ker \square_{G/L}$ sont donc très différents. Il faut maintenant montrer que le noyau de $\square_{G/L}$ contient l'espace $\mathcal{H}_2^s$. Pour ceci, je pense qu'il faut utiliser la deuxième fibration $G/L \cap K \to G/K$. Les fibres de cette fibration sont des variétés complexes compactes isomorphes à $K/L \cap K$. Il existe alors un unique opérateur différentiel G-équivariant $\square_K$ sur $G/L \cap K$ qui coïncide sur chaque fibre avec le laplacien associé à l'opérateur de Dolbeault sur $K/L \cap K$ (tordu par une certaine repésentation de $L \cap K$). J'espère par exemple obtenir une formule du type

$$\square - \square^{\mathrm{inv}} = 2\square_K + D_{\mathrm{L}} + C\,,$$

où D_{L} est un opérateur longitudinal (pour la fibration $G/L \cap K \to G/L$) d'ordre 1 et C est un opérateur scalaire. Pour obtenir une telle formule exacte, il faut commencer par trouver une connexion (avec torsion) adaptée aux dilatations

$$\lambda \cdot (h, v) = (\lambda h, \lambda^2 v), \quad (h, v) \in E \oplus F\,,$$

déjà utilisées dans l'étude de hypoéllipticité maximale de $\square$. L'opérateur C doit alors faire intervenir la courbure de la connexion choisie. Ceci permettrait également d'étudier la positivité de l'opérateur $\square$. Notons pour terminer que la positivité de l'opérateur $\square^{\mathrm{inv}}$ a déjà été étudié par S. Medhi et R. Zierau [MZ03, MZ06]. La comparaison des deux conditions de positivité pourrait alors être intéressante.

Références

[AS77] Michael Atiyah and Wilfried Schmid. A geometric construction of the discrete series for semisimple Lie groups. *Invent. Math.*, 42 :1–62, 1977.

[BC00] Paul Baum and Alain Connes. Geometric K-theory for Lie groups and foliations. *Enseign. Math. (2)*, 46(1-2) :3–42, 2000.

[BCH94] Paul Baum, Alain Connes, and Nigel Higson. Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras. In *C^*-algebras : 1943–1993 (San Antonio, TX, 1993)*, volume 167 of *Contemp. Math.*, pages 240–291. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[BJ83] Saad Baaj and Pierre Julg. Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C^*-modules hilbertiens. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 296(21) :875–878, 1983.

[BS81] M. W. Baldoni Silva. The unitary dual of $\mathrm{Sp}(n, 1)$, $n \geq 2$. *Duke Math. J.*, 48(3) :549–583, 1981.

[BSB83] M. W. Baldoni Silva and D. Barbasch. The unitary spectrum for real rank one groups. *Invent. Math.*, 72(1) :27–55, 1983.

[BSK80] M. W. Baldoni Silva and H. Kraljević. Composition factors of the principal series representations of the group $\mathrm{Sp}(n, 1)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 262(2) :447–471, 1980.

[BZ98] L. Barchini and R. Zierau. Square integrable harmonic forms and representation theory. *Duke Math. J.*, 92(3) :645–664, 1998.

[Kas83] G. G. Kasparov. Index of invariant elliptic operators, K-theory and representations of Lie groups. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 268(3) :533–537, 1983.

[Kna01] Anthony W. Knapp. *Representation theory of semisimple groups.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. An overview based on examples, Reprint of the 1986 original.

[Laf02a] V. Lafforgue. Banach KK-theory and the Baum-Connes conjecture. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, pages 795–812, Beijing, 2002. Higher Ed. Press.

[Laf02b] V. Lafforgue. K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes. *Invent. Math.*, 149(1) :1–95, 2002.

[LS04] Alexander Lubotzky and Yehuda Shalom. Finite representations in the unitary dual and Ramanujan groups. In *Discrete geometric analysis*, volume 347 of *Contemp. Math.*, pages 173–189. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[Mne97] Rached Mneimné. *Éléments de géométrie*. Nouvelle Bibliothèque Mathématique, 2. Cassini, Paris, 1997. Actions de groupes.

[MZ03] S. Mehdi and R. Zierau. Harmonic spinors on semisimple symmetric spaces. *J. Funct. Anal.*, 198(2) :536–557, 2003.

[MZ06] S. Mehdi and R. Zierau. Principal series representations and harmonic spinors. *Adv. Math.*, 199(1) :1–28, 2006.

[Pru03] N. Prudhon. C^*-algèbres de $\mathrm{Sp}(n,1)$ et K-théorie. Thèse de Doctorat. *Prépublication de l'IRMA*, 2003.

[Pru05] N. Prudhon. K-theory for $\mathrm{Sp}(n,1)$. *J. Funct. Anal.*, 221(1) :226–249, 2005.

[Pru06] N. Prudhon. Métriques sur les espaces homogènes réductifs, 2006.

[Pru07] N. Prudhon. Hypoellipticity and cohomological induction for $\mathrm{U}(p,q)$, 2007.

[SRV98] Susana A. Salamanca-Riba and David A. Vogan, Jr. On the classification of unitary representations of reductive Lie groups. *Ann. of Math. (2)*, 148(3) :1067–1133, 1998.

[Won93] H. W. Wong. Dolbeault cohomologies and Zuckerman modules. In *The Penrose transform and analytic cohomology in representation theory (South Hadley, MA, 1992)*, volume 154 of *Contemp. Math.*, pages 217–223. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.