
Analyse fonctionnelle

Raymond Mortini

Définition

E espace vectoriel sur le corps $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$. \mathcal{T} topologie T_1 sur E . On dit que (E, \mathcal{T}) est un *espace vectoriel topologique (evt)* si l'addition $\oplus \begin{cases} E \times E \longrightarrow E \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases}$ et la multiplication scalaire $\bullet \begin{cases} \mathbb{K} \times E \rightarrow E \\ (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x \end{cases}$ sont continues, où $E \times E$ et $\mathbb{K} \times E$ sont munis des topologies du produit.

- Exemple

• chaque espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel topologique pour la topologie induite par la distance $d(x, y) = \|x - y\|$

• $(L^p([0, 1]), d_p)$ $0 < p < 1 \rightarrow$ espace métrique complet

$(L^p([0, 1]), \|\cdot\|_p)$ $1 \leq p < \infty \rightarrow$ espace normé

$$d_p(f, g) = \|f - g\|_p^p = \int_{[0,1]} |f - g|^p.$$

Remarques.

1) E evt., $x_0 \in E$. Alors la translation $\begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x + x_0 \end{cases}$ est un homéomorphisme.

2) $\alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$. Alors l'homothétie $\begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto \alpha x \end{cases}$ est un homéomorphisme.

3) $\mathcal{U}(x_0) = x_0 + \mathcal{U}(0)$

4) $U \in \mathcal{U}(x_0) \implies \exists V \in \mathcal{U}(0)$ tq $x_0 + V + V \subseteq U$ (ceci est dû à la continuité de $\oplus : 0 + 0 = 0$).



I - THÉORÈMES DE HAHN-BANACH

E evt, f forme linéaire sur E . Alors f n'est pas continue en général (voir 1.10).

Les formes linéaires sont déterminées de façon unique par la donnée de leur image sur une base algébrique de E . Notons que d'après le lemme de Zorn, chaque espace vectoriel possède une base algébrique.

$F \subseteq E$, F sev. $f : F \rightarrow \mathbf{K}$ linéaire. Alors f possède un prolongement linéaire $f^* : E \rightarrow \mathbf{K}$. En effet, soit $E = F \oplus G$, où G est un supplémentaire algébrique de F . Soit $x = u + v, u \in F, v \in G$. On pose $f^*(x) = f(u)$.

$$\Rightarrow f^* \in l(E, \mathbf{K})$$

Définition

E espace vectoriel sur \mathbf{C} . On peut considérer le même ensemble de vecteurs E avec la même addition comme un espace vectoriel sur \mathbf{R} en restreignant à $\mathbf{R} \times E$ l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$, définie primitivement sur $\mathbf{C} \times E$. L'espace vectoriel définie ainsi sera noté par $E_{\mathbf{R}}$ et est appelé l'espace vectoriel réel sous-jacent à E .

Proposition 1.1

E espace vectoriel sur \mathbf{C} , $E_{\mathbf{R}}$ l'espace vectoriel réel sous-jacent à E .

1 - Soit f une forme linéaire (complexe) sur E ($f \in l(E, \mathbf{C})$) et soit u sa partie réelle ie $u(x) = \operatorname{Re} f(x), x \in E$. Alors u est une forme linéaire sur $E_{\mathbf{R}}$ ($u \in l(E_{\mathbf{R}}, \mathbf{R})$) et $\forall x \in E, f(x) = u(x) - i u(ix)$ (*)

2 - Soit $u \in l(E_{\mathbf{R}}, \mathbf{R})$. On définit f par (*). Alors $f \in l(E, \mathbf{C})$ et $u = \operatorname{Re} f$.

3 - Si E est normé alors u continue $\iff f$ continue. Dans ce cas, ces formes linéaires ont la même norme.

Démonstration

1) • $z = a + ib \Rightarrow z = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Re}(iz) \Rightarrow (*)$

• $\alpha, \beta \in \mathbf{R}, x, y \in E \Rightarrow u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)$

2) $u \in l(E_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}), f$ donnée par (*)

$$\Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$\text{et } f(ix) = u(ix) - i u(iix) = u(ix) - i u(-x) = u(ix) + i u(x) = i f(x)$$

$\Rightarrow f$ \mathbf{C} -linéaire.

(Notons que $f(i\alpha x) = \alpha f(ix)$ par la \mathbf{R} -linéarité de u). De plus, $\operatorname{Re} f = u$.

3) • L'assertion sur la continuité est claire

$$\bullet |u(x)| = |\operatorname{Re} f(x)| \leq |f(x)| \Rightarrow \sup_{\|x\|=1} |u(x)| \leq \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \implies$$

$$\|u\| \leq \|f\|.$$

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| = 1 \text{ t.q. } |f(x)| = \lambda f(x)$$

$$\Rightarrow |f(x)| = \lambda f(x) \underset{\text{C-lin}}{=} f(\lambda x) \underset{\substack{\text{image} \\ \text{réelle} (*)}}{=} u(\lambda x) \leq \|u\| \|\lambda x\| = \|u\| \|x\|$$

$$\overset{\sup}{\implies} \|f\| \leq \|u\|.$$

Finalement $\|u\| = \|f\|$

○

Définition

E espace vectoriel sur \mathbf{K} . Une application $p : E \rightarrow \mathbf{R}$ est dite *sublinéaire* si :

- 1) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in E, \forall \lambda > 0.$
- 2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E.$

- **Exemple** Chaque semi-norme est sublinéaire

$$\|\cdot\| : E \rightarrow [0, +\infty[\text{ t.q. } \bullet \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E$$

$$\bullet \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad x, y \in E \bullet \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall x$$

Lemme 1.2

E espace vectoriel sur \mathbf{R} , p application sublinéaire sur E , $M \subseteq E$ sev., $l : M \rightarrow \mathbf{R}$ linéaire, $l(x) \leq p(x) \quad \forall x \in M$. Soit $x_0 \in E \setminus M$. Alors il existe sur

$$H = M \oplus \mathbf{R}x_0 = \text{vect}(M, \{x_0\}) = \{x + \alpha x_0, x \in M, \alpha \in \mathbf{R}\}$$

une application linéaire L t.q. $L|_M = l$ et $L(x) \leq p(x) \quad \forall x \in H$

Démonstration

$$\xi, \eta \in M \Rightarrow l(\xi) + l(\eta) = l(\xi + \eta) \leq p(\xi + \eta)$$

$$p(\xi + \eta) = p(\xi + x_0 + \eta - x_0) \stackrel{p \text{ subli.}}{\leq} p(\xi + x_0) + p(\eta - x_0)$$

$$\Rightarrow l(\eta) - p(\eta - x_0) \leq p(\xi + x_0) - l(\xi)$$

$$\Rightarrow m_0 := \sup_{\eta \in M} [l(\eta) - p(\eta - x_0)] \leq \inf_{\xi \in M} [p(\xi + x_0) - l(\xi)] =: m_1$$

Soit $m_0 \leq m_2 \leq m_1$. Pour $x \in M$, $\lambda \in \mathbf{R}$, on pose

$$L(x + \lambda x_0) = l(x) + \lambda m_2 \Rightarrow L \in l(H, \mathbf{R}).$$

Soit $\lambda > 0$, $x \in M$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow L(x + \lambda x_0) &= l(x) + \lambda m_2 \leq l(x) + \lambda m_1 \\ &\leq l(x) + \lambda \left[\underbrace{p\left(\frac{1}{\lambda}x + x_0\right)}_{\xi} - l\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right] \stackrel{\text{sublin.}}{=} p(x + \lambda x_0) \end{aligned}$$

Pour $\lambda < 0$ et $x \in M$, on a :

$$L(x + \lambda x_0) = l(x) + \lambda m_2 \stackrel{\lambda < 0}{\leq} l(x) + \lambda m_0$$

$$\leq l(x) + \lambda \left[-p\left(-\frac{x}{\lambda} - x_0\right) + l\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \right] = p(x + \lambda x_0)$$

Pour $\lambda = 0$: $L(x) = l(x) \leq p(x)$

$$\Rightarrow L(y) \leq p(y) \quad \forall y \in H. \quad \circ$$

Théorème 1.3 (Hahn-Banach)

E espace vectoriel sur \mathbf{R} , p appli. sublinéaire sur E , $M \subseteq E$ sev., $l : M \rightarrow \mathbf{R}$ linéaire t.q. $l(x) \leq p(x) \quad \forall x \in M$. Alors $\exists L \in l(E, \mathbf{R})$ t.q. $L|_M = l$ et $L(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E$.

Démonstration

Soit $\mathcal{M} = \{(V, L) : M \subseteq V \subseteq E, V \text{ sev}, L \in l(V, \mathbf{R}), L|_M = l, L(x) \leq p(x) \quad \forall x \in V\}$.

$\mathcal{M} \neq \emptyset$ car $(M, l) \in \mathcal{M}$. On définit une relation d'ordre " \leq " sur \mathcal{M} par :

$$(V_1, L_1) \leq (V_2, L_2) \iff V_1 \subseteq V_2, L_2|_{V_1} = L_1$$

• \mathcal{M} est inductif, i.e. chaque partie \mathcal{K} totalement ordonnée de \mathcal{M} est majorée par un élément de \mathcal{M} :

$$U_0 := \{x \in E : \exists (U, L) \in \mathcal{K} \text{ avec } x \in U\} = \bigcup_{(U, L) \in \mathcal{K}} U$$

U_0 sev de E , car $\forall x_1, x_2 \in U_0, \exists (U_j, L_j) \in \mathcal{K} \text{ t.q. } x_j \in U_j \text{ (} j = 1, 2)$

Sans perte de généralité $U_1 \subseteq U_2$ (\mathcal{K} tot. ord.) $\Rightarrow x_1, x_2 \in U_2$

$$\xrightarrow[\text{esp. vect.}]{u_2} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in U_2 \xrightarrow{(U_2, L_2) \in \mathcal{K}} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in U_0$$

• Posons $L_0(x) := L(x)$ si $x \in U$ et $(U, L) \in \mathcal{K}$

$\Rightarrow L_0$ bien définie car: supposons que $(U_1, L_1), (U_2, L_2) \in \mathcal{K}$ avec $x \in U_1 \cap U_2$.

\mathcal{K} totalement ordonné $\xrightarrow[\text{s.p.g.}]{\implies} (U_1, L_1) \leq (U_2, L_2)$ ie $U_1 \subseteq U_2$ et $L_2|_{U_1} = L_1 \implies$

$L_2(x) = L_1(x)$.

De plus, L_0 linéaire, $(U_0, L_0) \in \mathcal{M}$, et $(U, L) \leq (U_0, L_0) \quad \forall (U, L) \in \mathcal{K}$

• Lemme de Zorn $\Rightarrow (\mathcal{M}, \leq)$ possède un élt max. (U, L)

$\xrightarrow{\text{Lemme 1.2}} U = E$ et d'après la définition de \mathcal{M} , L a les propriétés voulues. \circ

Théorème 1.5 (Hahn-Banach 2ème version)

E espace vectoriel sur \mathbf{K} , $M \subseteq E$ sous-espace vectoriel, p semi-norme, $l : M \rightarrow \mathbf{K}$ linéaire, $|l(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in M$. Alors $\exists L \in l(E, \mathbf{K})$ t.q. $L|_M = l$ et $|L(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in E$.

Démonstration

- 1er cas : $\mathbf{K} = \mathbf{R}$

hyp. 1.5 $\Rightarrow l$ et p satisfont les hyp. de 1.3

$$\Rightarrow \exists L \in l(E, \mathbf{R}) \text{ t.q. } L|_M = l \text{ et } L(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E$$

$$\Rightarrow -L(x) = L(-x) \leq p(-x) \stackrel{\text{semi-norme}}{=} |-1|p(x) = p(x)$$

$$\Rightarrow |L(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in E$$

- 2ème cas : $\mathbf{K} = \mathbf{C}$

Considérons $E_{\mathbf{R}}$ l'espace vectoriel réel sous-jacent. On définit

$u : M_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}$ par $u(x) = \operatorname{Re}(l(x))$

$\Rightarrow u \in l(M_{\mathbf{R}}, \mathbf{R})$ et $\underbrace{|u(x)|}_{\in \mathbf{R}} \leq \underbrace{|l(x)|}_{\in \mathbf{C}} \leq p(x) \quad \forall x \in M_{\mathbf{R}}$

l \mathbf{C} -linéaire $\xrightarrow{\text{prop. 1.1}} l(x) = u(x) - i u(ix) \quad \forall x \in M$

Le 1er cas nous donne un $\tilde{L} : E_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}$ t.q. $\tilde{L}|_{M_{\mathbf{R}}} = u$ et $\underbrace{|\tilde{L}(x)|}_{\in \mathbf{R}} \leq p(x) \quad \forall x \in E_{\mathbf{R}}$.

On définit $L : E \rightarrow \mathbf{C}$ par $L(x) = \tilde{L}(x) - i \tilde{L}(ix)$

$\Rightarrow L$ est \mathbf{R} -lin. On a même que L est \mathbf{C} -lin (prop. 1.1).

En plus $L|_M = l$.

Soit $x \in E$, $\exists \sigma \in \mathbf{C}$, $|\sigma| = 1$ t.q. $|L(x)| = \sigma L(x)$

$\Rightarrow |L(x)| = \sigma L(x) = L(\sigma x) = \operatorname{Re}(L(\sigma x)) = \tilde{L}(\sigma x) = \tilde{L}(\sigma x) \leq p(\sigma x)$

p semi-norme $\Rightarrow p(\sigma x) = |\sigma| p(x) = p(x) \quad \forall x \in E$. Donc $|L(x)| \leq p(x)$. \circ

Corollaire 1.6

E espace vectoriel sur \mathbf{K} , p semi-norme sur E , $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$. Alors

$$\exists L \in l(E, \mathbf{K}) \text{ t.q. } L(x_0) = p(x_0) \quad \text{et} \quad |L(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in E.$$

Démonstration

Soit $F = \operatorname{vect} x_0 = \mathbf{K} x_0$. On définit $l : F \rightarrow \mathbf{K}$ par $l(\lambda x_0) = \lambda p(x_0)$ ($\lambda \in \mathbf{K}$)

$\Rightarrow l$ est \mathbf{K} -linéaire et $l(x_0) = p(x_0)$. Pour $x = \lambda x_0 \in F$ on obtient: $|l(x)| =$

$$|l(\lambda x_0)| = |\lambda p(x_0)| = |\lambda| p(x_0) \stackrel{\text{semi-norme}}{=} p(\lambda x_0) = p(x)$$

$\xrightarrow{\text{Theor. 1.5}} \exists L \in l(E, \mathbf{K})$ t.q. $L|_F = l$ et $|L(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in E$ \circ

Théorème 1.7 Hahn-Banach pour les espaces normés.

E espace normé sur \mathbf{K} , F sev. de E , $l : F \rightarrow \mathbf{K}$ forme linéaire continue. Alors il existe une application linéaire continue $L : E \rightarrow \mathbf{K}$ t.q. $L|_F = l$ et $\|L\| = \|l\|$.

Démonstration

Soit $p : E \rightarrow [0, +\infty[$ définie par $p(x) = \|l\| \|x\|_E$

$\Rightarrow p$ semi-norme et $\forall x \in F$ $|l(x)| \leq \|l\| \|x\|_E = p(x)$

$\stackrel{1.5}{\Rightarrow} \exists L : E \rightarrow \mathbf{K}$ linéaire, $L|_F = l$ telle que $|L(x)| \leq p(x) = \|l\| \|x\|_E \quad \forall x \in E$.

$\Rightarrow L$ continue (appl. lin. bornée) et $\|L\| \leq \|l\|$. Supposons $F \neq \{0\} \Rightarrow$

$$\|L\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|L(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} \frac{|L(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} \frac{|l(x)|}{\|x\|} = \|l\|.$$

Donc $\|L\| = \|l\|$. \circ

Lemme 1.8

E espace normé, $F \subseteq E$ sev. propre, $x_0 \in E \setminus F$. Supposons que $\delta := \text{dist}(x_0, F) > 0$. Alors il existe une forme linéaire continue L sur E t.q. $\|L\| = 1$, $L(x_0) = \delta$ et $L|_F \equiv 0$.

Démonstration

Posons $F_0 = [x_0, F] = \{x = \alpha x_0 + y, \alpha \in \mathbf{K}, y \in F\}$ (représ. uniq.). On définit

$$l : \begin{cases} F_0 \rightarrow \mathbf{K} \\ x = \alpha x_0 + y \mapsto l(x) := \alpha \cdot \delta \end{cases}$$

$\Rightarrow l$ linéaire, $l|_F \equiv 0$ $l(x_0) = \delta$.

Soit $\alpha \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$, $y \in F$,

$$x = \alpha x_0 + y \Rightarrow \|x\| = \|\alpha x_0 + y\| = |\alpha| \left\| x_0 + \frac{1}{\alpha} y \right\| \geq |\alpha| d(x_0, F) = |\alpha| \delta = |l(x)|$$

$\Rightarrow l$ continue et $\|l\| \leq 1$

Considérons $(y_n) \in F$ t.q. $\|x_0 - y_n\| \rightarrow \delta$

$$\xRightarrow{(\delta > 0)} \frac{|l(x_0 - y_n)|}{\|x_0 - y_n\|} \stackrel{l|_F \equiv 0}{=} \frac{|l(x_0)|}{\|x_0 - y_n\|} \rightarrow \frac{l(x_0)}{\delta} = \frac{\delta}{\delta} = 1$$

$$\Rightarrow \|l\| = 1$$

th. 1.7 assertion. ○

Définition

$X \neq \emptyset$, $\mathcal{F} \subseteq \mathbf{C}^X$. \mathcal{F} sépare les points (\mathcal{F} famille séparante) si

$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2, \exists f \in \mathcal{F}$ t.q. $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Corollaire 1.9

Soit E^* l'espace normé des formes linéaires continues sur E . Alors on a :

a) Si $E \neq \{0\}$ est un espace normé alors $E^* \neq \{0\}$ et E^* est séparante.

b) De plus, $\forall x_0 \neq 0, x_0 \in E, \exists L \in E^*$ t.q. $\|L\| = 1, L(x_0) = \|x_0\|$.

c) $\dim E^* < \infty \iff \dim E = \dim E^*$.

Démonstration

• Posons $F = \{0\}$, $\delta = \text{dist}(x_0, F) \xRightarrow{F \text{ fermé}} \delta > 0$ et $\delta = \|x_0\|$

$\xRightarrow{\text{lemme 1.8}}$ assertion b)

• Soit $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 \neq 0 \xRightarrow{b)} \exists L \in E^*, L(x_1 - x_2) = \|x_1 - x_2\| \neq 0$
 $\Rightarrow L(x_1) \neq L(x_2)$

$\Rightarrow E^*$ séparante.

• Supposons $\dim E = \infty$. Soit $\{x_1, x_2, \dots\}$ un système libre. Alors d'après 1.7 et 1.10 $\exists f_j \in E^*$ tel que $f_j(e_k) = 0$ si $k < j$ et $f_j(x_j) = 1$. Il est clair que $\{f_1, f_2, \dots\}$ est un système libre dans E^* . Donc $\dim E^* = \infty$. D'autre part si, $\dim E = n$, alors on sait que $\{f_1, \dots, f_n\}$ engendre $E' = E^*$. ○

Remarque Il est possible que $E^* = \{0\}$ si E est un evt. arbitraire

- **Exemple** $L^p([0, 1])$ $0 < p < 1$. (exo)

Proposition 1.10

$E \neq \{0\}$ espace normé. Alors chaque forme linéaire f sur E est continue $\Leftrightarrow \dim E < +\infty$.

Démonstration

" \Leftarrow " Soit (x_1, \dots, x_n) base algébrique de E ($\dim E = n < +\infty$). Notons que toutes les normes sur E sont équivalentes. Soient

$$y_k \in E, y_k = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu^{(k)} x_\nu, \quad y = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu x_\nu. \quad \text{Alors } y_k \xrightarrow{\|\cdot\|} y \iff \alpha_\nu^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{(*)} \alpha_\nu \quad \forall \nu = 1, \dots, n$$

Soit $f : E \rightarrow \mathbf{K}$ linéaire. Alors $f(y_k) = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu^{(k)} f(x_\nu) \xrightarrow{(*)} \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu f(x_\nu) = f(y)$

" \Rightarrow " Soit $\dim E = +\infty$. Construisons une forme linéaire discontinue. Soit \mathcal{B} base algébrique de E . Soit $\{b_n, n \in \mathbf{N}\} \subseteq \mathcal{B}$, s.p.g. $\|b_n\| = 1$. Soit $l(b_\nu) = \nu, \nu = 1, 2, \dots$ et $l(b) = 0 \forall b \in \mathcal{B} \setminus \{b_n, n \in \mathbf{N}\}$.

l admet un prolongement linéaire sur E (noté aussi par l).

Mais l est discontinue car l non bornée sur la boule unité de E : $\frac{l(b_\nu)}{\|b_\nu\|} = \nu \rightarrow \infty$.

○

Définition Soient E un espace normé et E^* son dual topologique.

Notation Si $x^* \in E^*$ et $x \in E$ alors on écrit $(x, x^*) := x^*(x)$. Ainsi le noyau de x^* est donné par $\text{Ker } x^* := \{x \in E : (x, x^*) = 0\}$.

1.11 Proposition Soit E un espace normé et $x \in E$. Alors

$$\|x\| = \max_{\|x^*\|=1} |(x, x^*)| \quad (x^* \in E^*). \quad (1)$$

Dém $|(x, x^*)| = |x^*(x)| \leq \|x^*\| \|x\| = \|x\|$ si $\|x^*\| = 1$. Si $x \neq 0$, alors d'après Hahn-Banach $\exists x^* \in E^*$ tq $x^*(x) = \|x\|$ et $\|x^*\| = 1 \implies \sup_{\|y^*\|=1} |(x, y^*)| = \max_{\|y^*\|=1} |(x, y^*)| = |(x, x^*)| = \|x\|$.

Si $x = 0$, l'équation (1) est triviale. ○

1.12 Théorème sur les espaces quotients

a) Soit E un espace normé et $F \subseteq E$ un sev fermé de E . Soit $[x] := \tilde{x} := x + F \in E/F$, et $\|\tilde{x}\| := \inf_{y \in [x]} \|y\|$. Alors

(1) $\|\tilde{x}\|$ est une norme sur l'espace quotient E/F .

(2) L'homomorphisme canonique $\pi : E \rightarrow E/F$ définie par $\pi(x) = [x]$ est continue, surjectif et ouvert. On a $\|\pi\|_{op} = 1$ si $F \neq E$.

(3) Si E est un espace de Banach, alors E/F l'est aussi.

b) Soit en plus H un espace normé et $A \in \ell(E, H)$ tel que $\text{Ker } A \supseteq F$. Alors

(4) $\exists_1 \hat{A} \in \ell(E/F, H)$ tq $A = \hat{A} \circ \pi$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{A} & H \\ \pi \searrow & & \nearrow \hat{A} \\ & E/F & \end{array}$$

- (5) \hat{A} injective $\iff F = \text{Ker } A$ (\hat{A} s'appelle dans ce cas l'injection canonique).
(6) A continue $\iff \hat{A}$ continue. Dans ce cas $\|A\|_{op} = \|\hat{A}\|_{op}$.
(7) Si A est surjective et $\text{Ker } A = F$, alors \hat{A} est un isomorphisme de $E/\text{Ker } A$ sur H .

Dém. Voir TD.

Soient E un espace normé, $M \subseteq E$ et $N \subseteq E^*$ des sous-espaces (sev). On définit les espaces orthogonaux associés à M et N par

$$M^\perp := \{x^* \in E^* : (x, x^*) = 0 \forall x \in M\}$$

$${}^\perp N := \{x \in E : (x, x^*) = 0 \forall x^* \in N\}.$$

On voit que M^\perp et ${}^\perp N$ sont des sev de E^* resp. E et que ${}^\perp N$ est fermé dans E , car ${}^\perp N = \bigcap_{x^* \in N} \text{Ker } x^*$.

En plus, M^\perp est fermé dans E^* , car soit $x_n^* \in M^\perp$ et $\|x_n^* - x^*\|_{op} \rightarrow 0$. Alors $\forall y \in M : 0 = (y, x_n^*) \rightarrow (y, x^*)$ et donc $(y, x^*) = 0 \forall y \in M$. Ainsi $x^* \in M^\perp$.

1.13 Proposition Soit E un espace normé. Alors pour tout sev M de E on a : ${}^\perp(M^\perp) = \overline{M}$.

Dém. " \supseteq " Soit $x \in M$. Alors $(x, x^*) = 0 \forall x^* \in M^\perp$. Donc $x \in {}^\perp(M^\perp)$. Cet espace étant fermé, on obtient $\overline{M} \subseteq {}^\perp(M^\perp)$.

" \subseteq " Si $x \notin \overline{M}$, alors d'après Hahn-Banach, $\exists x^* \in E^*$ tq $\|x^*\| = 1$, $x^*|_{\overline{M}} \equiv 0$ et $(x, x^*) \neq 0$ Ceci implique que $x^* \in M^\perp$, et ainsi $x \notin {}^\perp(M^\perp)$. \circ

1.14 Proposition Soit E un espace normé et $M \subseteq E$ un sev fermé. Alors

(1) $M^* \underset{\|\cdot\|}{\cong} E^*/M^\perp$, i.e. M^* est isomorphe isométrique à l'espace quotient E^*/M^\perp , et

$$\sup_{\substack{x \in M \\ \|x\|=1}} |(x, x^*)| = \min_{y^* \in M^\perp} \|x^* + y^*\| \quad (x^* \in E^*)$$

(2) $(E/M)^* \underset{\|\cdot\|}{\cong} M^\perp$ et

$$\max_{\substack{y^* \in M^\perp \\ \|y^*\|=1}} |(x, y^*)| = \inf_{y \in M} \|x + y\| \quad (x \in E).$$

Dém. (1) $x^* \in E^* \implies x^*|_M \in M^*$; l'application de restriction $\rho : E^* \rightarrow M^*$ définie par $\rho(x^*) := x^*|_M$ est linéaire et, d'après Hahn-Banach, surjective. Notons que $\text{Ker } \rho = \{x^* \in E^* : x^*|_M \equiv 0\} = M^\perp$. Considérons l'injection canonique $\hat{\rho}$ associée à ρ :

$$\begin{array}{ccc}
E^* & \xrightarrow{\rho} & M^* \\
\pi \searrow & & \nearrow \hat{\rho} \\
& E^*/\text{Ker } \rho &
\end{array}$$

$\hat{\rho}^{-1} : M^* \rightarrow E^*/M^\perp$ est donné par: $m^* \mapsto x^* + M^\perp$, où x^* est un prolongement linéaire continue quelconque de m^* sur E .

• $E^*/M^\perp \cong M^*$ clair

• $\hat{\rho}$ isométrie: Soit $m^* \in M^*$. Hahn-Banach $\implies \exists x^* \in E^*$ tq $\rho(x^*) = m^*$.

Hahn-Banach: $\|\hat{\rho}^{-1}(m^*)\|_{E^*/M^\perp} = \|x^* + M^\perp\| = \inf\{\|y^*\| : y^*|_M = m^*\} = \|m^*\| \implies \hat{\rho}$ isométrie. L'infimum est atteint. Donc: $\min_{y^* \in M^\perp} \|x^* + y^*\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in M}} |(x, x^*)|$.

(2) Soit $\pi : E \rightarrow E/M$ l'application quotient. L'isomorphisme isométrique T entre $(E/M)^*$ et M^\perp sera définie par: $T(\Phi) = \Phi \circ \pi$, où $\Phi \in (E/M)^*$.

• T est bien définie: en effet, notons d'abord que $\Phi \circ \pi$ est un élément de E^* . Soit $x \in M$, alors on a $\forall \Phi \in (E/M)^*$: $(\Phi \circ \pi)(x) = \Phi(x + M) = \Phi([0]) = 0$. Donc $T(\Phi) = \Phi \circ \pi \in M^\perp$.

• T linéaire, car Φ et π linéaire.

• T injective, car soit $T\Phi = \mathcal{O}$, i.e. $\forall x \in E : (T\Phi)(x) = 0$. Alors $0 = (\Phi \circ \pi)(x) = \Phi(\pi(x))$. Ainsi $\Phi(E/M) = \{0\}$ et donc $\Phi \equiv 0$.

• T est surjective, car car, soit $y^* \in M^\perp \subseteq E^*$. Alors $\text{Ker } y^* \supseteq M$. 1.12 $\implies \exists_1 \hat{y}^* \in (E/M)^* : y^* = \hat{y}^* \circ \pi$. Ainsi $T(\hat{y}^*) = \hat{y}^* \circ \pi = y^*$.

• T et T^{-1} sont des isométries, car d'après 1.12 on a pour $y^* \in M^\perp$ que $\|\hat{y}^*\| = \|y^*\| = \|T\hat{y}^*\|$.

• (estimations des normes): 1.11 $\implies \forall x + M \in E/M :$

$$\begin{aligned}
\inf_{y \in M} \|x + y\| &= \|x + M\| = \max_{\substack{\Phi \in (E/M)^* \\ \|\Phi\|=1}} |(x + M, \Phi)| = \\
&= \max_{\substack{\Phi \in (E/M)^* \\ \|\Phi\|=1}} |\Phi(x + M)| = \max_{\substack{\Phi \in (E/M)^* \\ \|\Phi\|=1}} |T\Phi(x)| = \\
&= \max_{\substack{y^* \in M^\perp \\ \|y^*\|=1}} |y^*(x)| = \max_{\substack{y^* \in M^\perp \\ \|y^*\|=1}} |(x, y^*)|.
\end{aligned}$$

1.15 Théorème sur les opérateurs duaux

Soient E, F des espaces normés. Alors $\forall A \in L(E, F) \exists_1 A^* \in \ell(F^*, E^*)$ tq

$$\forall x \in E, \forall y^* \in F^* : y^*(Ax) = \underbrace{(Ax)}_{\in F}, \underbrace{y^*}_{\in F^*} = \underbrace{(x)}_{\in E}, \underbrace{A^*y^*}_{\in E^*} = (A^*y^*)(x) \quad (2)$$

On a $A^*y^* = y^* \circ A$, $\forall y^* \in F^*$. En plus A^* est (automatiquement) continue, donc $A^* \in L(F^*, E^*)$, et $\|A^*\|_{op} = \|A\|_{op}$.

Dém. Posons $A^*y^* := y^* \circ A$. Alors

• A^* satisfait (2), car

$$(x, A^*y^*) = (A^*y^*)(x) = (y^* \circ A)(x) = y^*(Ax) = (Ax, y^*).$$

- A^* est bien sûr linéaire.
 - A^* est déterminé de façon unique par (2). En effet, supposons que $\tilde{A} \in \ell(F^*, E^*)$ satisfait (2), alors $\forall x \in E, \forall y^* \in F^* : (Ax, y^*) = (x, \tilde{A}y^*) \implies (x, \tilde{A}y^*) = (x, A^*y^*) \forall x \in E, \forall y^* \in F^*$. Donc $\forall y^* \in F^* : \tilde{A}y^* = A^*y^*$. Ainsi $A^* = \tilde{A}$.
 - A^* est continue, car $\|A^*y^*\| = \|y^* \circ A\| \leq \|y^*\| \|A\| \implies \|A^*\| \leq \|A\|$.
- D'autre part, Hahn-Banach 1.9 b) $\implies \forall x \in E$ avec $Ax \neq 0 \exists y^* \in F^* : \|y^*\| = 1$ et $|y^*(Ax)| = \|Ax\|$. Donc:

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= |(Ax, y^*)| = |(x, A^*y^*)| = |(A^*y^*)(x)| \leq \|A^*y^*\| \|x\| \leq \\ &\leq \|A^*\| \underbrace{\|y^*\|}_{=1} \|x\| = \|A^*\| \|x\|. \end{aligned}$$

Donc $\|A\| \leq \|A^*\|$.

1.16 Théorème Soient E, F des espaces normés et $A \in L(E, F)$. Alors

- (1) $\text{Ker } A = {}^\perp(A^*(F^*))$;
- (2) $\text{Ker } A^* = \overline{A(E)}^\perp$;
- (3) ${}^\perp(\text{Ker } A^*) = \overline{A(E)}$.

Dém. (1) $x \in \text{Ker } A \iff Ax = 0 \stackrel{(1.9b)}{\underset{H.B.}{\iff}} \forall y^* \in F^* : (Ax, y^*) = 0 \iff \forall y^* \in F^* : (x, A^*y^*) = 0 \iff x \in {}^\perp(A^*(F^*))$.

(2) $y^* \in \text{Ker } A^* \iff A^*y^* = 0 \iff \forall x \in E : (x, A^*y^*) = 0 \iff \forall x \in E : (Ax, y^*) = 0 \iff y^* \in A(E)^\perp$. ○

(3) (2) $\implies {}^\perp(\text{Ker } A^*) = {}^\perp(A(E)^\perp) \stackrel{1.13}{=} \overline{A(E)}$.

II Théorème de Baire et ses conséquences

Définition Soit X un espace topologique. On dit que X est un *espace de Baire*, si toute intersection dénombrable d'ouverts dense de X est dense dans X .

Proposition 2.1 X est un espace de Baire \iff toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Dém. Clair; utiliser $A^\circ = \emptyset \iff A^c := X \setminus A$ dense et les règles de de Morgan. \circ

Corollaire 2.2 Soit X un espace de Baire, $F_n \subseteq X$ fermé, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Alors $\exists n_0$ tel que $F_{n_0}^\circ \neq \emptyset$.

2.3 Théorème de Baire Chaque espace métrique complet (X, d) est un espace de Baire.

Dém. Soit $E = \bigcap U_n$, U_n ouvert et dense dans X . A Montrer que $\forall U$, U ouvert on a : $E \cap U \neq \emptyset$. U_1 dense $\implies \exists x_1 \in U \cap U_1 \neq \emptyset$. $U \cap U_1$ ouvert, $X T_3$, $\implies \exists \varepsilon_1 \in]0, 1/2[$ tel que la boule $B_1 := B(x_1, \varepsilon_1)$ satisfait $\overline{B_1} \subseteq U \cap U_1$. De même, U_2 dense $\implies \exists x_2 \in B_1 \cap U_2 \neq \emptyset \implies \exists \varepsilon_2 \in]0, 1/4[$ tel que la boule $B_2 = B_2(x_2, \varepsilon_2)$ satisfait $\overline{B_2} \subseteq B_1 \cap U_2 \subseteq U \cap U_1 \cap U_2$.

Par récurrence sur n , on trouve des boules $B_n := B(x_n, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_n \in]0, 2^{-n}[$ tel que

$$\overline{B_n} \subseteq B_{n-1}, \quad B_n \subseteq U \cap U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n.$$

Montrons que la suite des centres (x_n) est une suite de Cauchy. En effet, soit $n, m \in \mathbb{N}$ et $n, m \geq N$. Alors $x_n, x_m \in B_N$ et

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_N) + d(x_m, x_N) \leq 2^{-N} + 2^{-N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

X complet $\implies \exists a \in X : d(x_n, a) \rightarrow 0$. En plus, $x_n \in B_N \forall n \geq N$. $\overline{B_N}$ fermé $\implies a \in B_N \forall N \implies a \in U \cap U_1 \cap \dots \cap U_N \forall N$. Donc $a \in U \cap E \implies U \cap E \neq \emptyset$. \circ

2.4 Théorème d'Osgood Soit X un espace métrique complet et $\mathcal{F} \subseteq C_{\mathbb{R}}(X)$ une famille de fonctions continues à valeurs réelles telle que

$$\forall x \in X, \exists C = C(x) \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{F} : f(x) \leq C. \quad (*)$$

Alors il existe une boule B telle que \mathcal{F} soit uniformément majorée sur B , i.e.

$$\exists B, \exists M, \forall x \in B, \forall f \in \mathcal{F} : f(x) \leq M.$$

Dém. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{F}$. Posons $F_n(f) = \{x \in X : f(x) \leq n\}$. f continue $\implies F_n(f) = f^{-1}(] - \infty, n])$ fermé. Notons que $F_n(f) = \emptyset$ est possible. Posons

$$F_n = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} F_n(f) = \{x \in X : \forall f \in \mathcal{F} \ f(x) \leq n\}.$$

Alors F_n fermé. En plus, $(*) \implies \bigcup F_n = X$. 2.3, 2.2 $\implies \exists n_0$ tel que $F_{n_0}^\circ \neq \emptyset$, i.e. \exists boule $B \subseteq F_{n_0}$. Soit $M := n_0$. Alors on a: $\forall x \in B, \forall f \in \mathcal{F} : f(x) \leq M$. \circ

2.5 1^{er} Théorème de Banach-Steinhaus Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach, $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace normé et $\mathcal{F} \subseteq L(E, F)$ une famille d'applications linéaires bornées (=continues) t.q.

$$\forall x \in E, c(x) := \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\|_F < \infty.$$

Alors la famille $\{\|T\|_{op} : T \in \mathcal{F}\}$ est bornée, i.e. $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\|_{op} < \infty$.

Dém. Considérons pour $T \in \mathcal{F}$ la fonction $f_T : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_T(x) = \|Tx\|_F$. T et $\|\cdot\|_F$ continues $\implies f_T$ continue (sémi-norme). La famille $\mathcal{P} = \{f_T : T \in \mathcal{F}\}$ est simplement bornée, donc d'après Osgood (2.4) \exists boule $B = B(x_0, 2\varepsilon) \subseteq E$ et $M > 0$ tq $\forall x \in B, \forall T \in \mathcal{F} : f_T(x) \leq M$. Alors $\forall x \in E$ avec $\|x\|_E = 1$ on obtient:

$$\begin{aligned} \|Tx\|_F &= \frac{1}{\varepsilon} \|T(\varepsilon x)\|_F = \frac{1}{\varepsilon} \|T(\varepsilon x + x_0) - Tx_0\|_F \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left(\underbrace{\|T(\varepsilon x + x_0)\|_F}_{\in B} + \|Tx_0\|_F \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} (M + M) = \frac{2M}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Donc $\|T\|_{op} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F \leq \frac{2M}{\varepsilon}$ pour tout $T \in \mathcal{F}$. \circ

2.6 2^{me} Théorème de Banach-Steinhaus Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach, $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace normé et $T_n \in L(E, F)$. Supposons que $\lim_n T_n(x) =: Tx$ existe $\forall x \in X$, i.e. $\|T_n x - Tx\|_F \rightarrow 0$. Alors $(\|T_n\|_{op})$ est une suite bornée, T est linéaire et continue et

$$\|T\|_{op} \leq \liminf_n \|T_n\|_{op}.$$

Dém. T linéaire: clair. Hypothèse $\implies \forall x \in E : \sup_n \|T_n(x)\|_F < \infty$. 2.5 $\implies \exists M \sup_n \|T_n\|_{op} \leq M$. Comme

$$\|Tx\|_F \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|T_n x\|_F \leq \|T_n\|_{op} \|x\|_E \leq M \|x\|_E$$

on voit que T est bornée (=continue) et que $\|T\|_{op} \leq M$. Il est facile de voir que pour M on peut choisir $\liminf_n \|T_n\|_{op}$, en choisissant une sous-suite (n_k) tq $\|T_{n_k}\|_{op} \rightarrow \liminf_n \|T_n\|_{op}$. \circ

2.6 3^{me} Théorème de Banach-Steinhaus Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces de Banach et $T_n \in L(E, F)$. Alors (T_n) converge simplement vers $T \in L(E, F)$ si et seulement si

- (1) $\|T_n\|_{op} \leq M$ et
- (2) $(T_n x)$ converge pour tout $x \in S$, où S est dense dans E .

Dém " \implies " (1) découle de 2.6. (2) évident.

" \Leftarrow " Soit $x_0 \in E$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\bar{S} = E$, $\exists \tilde{x} \in S$ tq $\|\tilde{x} - x_0\|_E < \frac{\varepsilon}{3M}$. (2)
 $\implies \exists n_0$ tq $\|T_n \tilde{x} - T_m \tilde{x}\|_F < \frac{\varepsilon}{3} \forall n, m \geq n_0$. Ainsi

$$\begin{aligned} \|T_n x_0 - T_m x_0\|_F &\leq \|T_n x_0 - T_n \tilde{x}\|_F + \|T_n \tilde{x} - T_m \tilde{x}\|_F + \|T_m \tilde{x} - T_m x_0\|_F \leq \\ &\|T_n\|_{op} \|\tilde{x} - x_0\|_E + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_m\|_{op} \|\tilde{x} - x_0\|_E \leq \\ &M \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $(T_n x_0)$ est une suite de Cauchy dans F . F complet $\implies (T_n x_0)$ converge.
 Posons $Tx = \lim_n T_n x$ pour $x \in E$. Alors, 2.6 $\implies T$ linéaire et continue. \circ

Remarques préliminaires $f : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_2)$ continue $\iff \forall V \in \mathcal{T}_2 : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_1$.
 Si f est continue et bijective, alors l'inverse f^{-1} existe et est une application ouverte.
 On sait que f^{-1} est continue $\iff (f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ est ouvert $\forall U \in \mathcal{T}_1$; i.e. si f est une application ouverte.

2.7 Théorème de Banach (principe de l'application ouverte)

Chaque application linéaire continue surjective T d'un espace de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ sur un espace de Banach $(F, \|\cdot\|_F)$ est ouverte.

Dém. *Etape 1:* Montrons que si U est une boule (ouverte) dans E avec $0_E \in U$, alors $\overline{T(U)}$ contient une boule centrée en 0_F .

En effet, soit $U = B_2 := B(0_E, 2\varepsilon)$ et $B_1 = B(0_E, \varepsilon)$. Notons pour plus tard que $B_1 - B_1 = B_2$. En effet $B_1 - B_1 \subseteq B_2$ est dû à l'inégalité triangulaire et si $x \in B_2$, alors $x = \frac{1}{2}x - (-\frac{1}{2}x) \in B_1 - B_1$.

On a que $E = \bigcup_n nB_1$. T surjective \implies

$$F = T(E) = T\left(\bigcup_n nB_1\right) = \bigcup T(nB_1),$$

et ainsi $F = \bigcup_n \overline{nT(B_1)}$. 2.3 $\implies F$ espace de Baire $\stackrel{2.3}{\implies} \exists m$ tel que $\overline{mT(B_1)} = m\overline{T(B_1)}$ contient une boule ouverte S_0 . Posons $S_1 := \frac{1}{m}S_0$. Alors $S_1 \subseteq \frac{1}{m}(\overline{mT(B_1)}) = \overline{T(B_1)}$. Notons que S_1 n'est pas nécessairement une boule contenant 0_F . Mais S_1 est ouvert, et chaque translation est un homéomorphisme. Donc $S_1 - x$ est ouvert $\forall x \in F \implies S_1 - S_1 := \{s - t : s, t \in S_1\} = \bigcup_{x \in S_1} (S_1 - x)$ ouvert. Comme $0_F \in S_1 - S_1$, il existe une boule B centrée en 0_F telque

$$B \subseteq S_1 - S_1 \subseteq \overline{T(B_1)} - \overline{T(B_1)} \subseteq \overline{T(B_1) - T(B_1)} = \overline{T(B_1 - B_1)} = \overline{T(B_2)}.$$

Ainsi $B \subseteq \overline{T(U)}$.

Etape 2: Montrons que si U est une boule dans E avec $0_E \in U$, alors $T(U)$ contient une boule centrée en 0_F .

En effet, soit $U = B_E(0_E, 2\varepsilon_0)$. Prenons $\varepsilon_n > 0$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon_0$. Etape 1 $\implies \exists \rho_n > 0$ tel que

$$B_F(0_F, \rho_n) \subseteq \overline{TB_E(0_E, \varepsilon_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

S.p.g. $\rho_n \searrow 0$. A montrer que

$$B_F(0_F, \rho_0) \subseteq T(B_E(0_E, 2\varepsilon_0)) = T(U). \quad (2)$$

Soit $y \in B_F(0_F, \rho_0)$. Cherchons $x \in B_E(0_E, 2\varepsilon_0)$ avec $Tx = y$.

(1) $\implies y \in \overline{TB_E(0_E, \varepsilon_0)} \implies \exists x_1 \in B_E(0_E, \varepsilon_0)$ tel que $\|Tx_1 - y\|_F < \rho_1$. Ainsi $y - Tx_1 \in B_F(0_F, \rho_1)$.

(1) $\implies y - Tx_1 \in \overline{TB_E(0_E, \varepsilon_1)} \implies \exists x_2 \in B_E(0_E, \varepsilon_1)$ tel que $\|y - Tx_1 - Tx_2\|_F < \rho_2$.

Par récurrence, on obtient une suite (x_n) dans $B_E(0_E, \varepsilon_{n-1})$ tel que

$$\|y - Tx_1 - Tx_2 - \dots - Tx_n\|_F < \rho_n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad (3)$$

Notons que $\sum_{n=M}^N \|x_n\|_E \leq \sum_{n=M}^N \varepsilon_{n-1} \rightarrow 0$ si $N \geq M \rightarrow \infty$. E complet $\implies \exists x_0 \in E$ tel que $\|\sum_{n=1}^N x_n - x_0\|_E \rightarrow 0$ et $\|x_0\|_E \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{n-1} < 2\varepsilon_0$.

T continue $\implies T(x_1 + \dots + x_N) \xrightarrow{\|\cdot\|_F} Tx_0$;

$$\implies y - Tx_1 - \dots - Tx_N \xrightarrow{\|\cdot\|_F} y - Tx_0$$

$$\implies \|y - Tx_0\|_F = \lim_N \|y - Tx_1 - \dots - Tx_N\|_F \stackrel{(3)}{\leq} \lim \rho_N = 0.$$

On déduit que $y = Tx_0$ avec $x_0 \in B_E(0_E, 2\varepsilon_0)$. Donc $y \in TB_E(0_E, 2\varepsilon_0) = T(U)$.

Etape 3: Il reste à démontrer le cas général: U ouvert $\implies T(U)$ ouvert.

Soit $y \in T(U)$. Alors $\exists x \in U$ avec $y = Tx$ et $B_E := B_E(0_E, \varepsilon)$ tq $B_E(x, \varepsilon) = x + B_E \subseteq U$ (car U ouvert). Etape 2 $\implies \exists B_F := B_F(0_F, \delta)$ tel que $B_F \subseteq T(B_E)$. Soit $V = y + B_F$. Alors $V \subseteq y + T(B_E) = T(x + B_E) \subseteq T(U)$. V étant une boule, on obtient que $y \in (TU)^\circ$. Donc $T(U)$ ouvert. \circ

2.8 Théorème sur la continuité de l'inverse Soient E et F des espaces de Banach et $T : E \rightarrow F$ linéaire, continue et bijective. Alors $T^{-1} : F \rightarrow E$ est continue (et linéaire).

Dém. 2.7 $\implies (T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ ouvert $\forall U \subseteq E$, U ouvert. Donc T^{-1} continue. \circ

2.9 Corollaire Soient E et F des espaces de Banach et $T \in L(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

i) T est injective et l'image $T(E)$ fermé.

ii) $\exists C > 0, \forall x \in E : \|Tx\|_F \geq C\|x\|_E$.

En particulier (i) ou (ii) impliquent que $T^{-1} : T(E) \rightarrow E$ est continue et que $\|T\|_{op}\|T^{-1}\|_{op} \geq 1$

Dém. i) \implies ii). $T(E)$ fermé, F complet, T linéaire $\implies T(E)$ espace de Banach.

2.8 $\implies T^{-1} : T(E) \rightarrow E$ continue, i.e.

$$\exists D > 0, \forall y \in T(E) : \|T^{-1}y\|_E \leq D\|y\|_F.$$

Comme $y = Tx$ pour $x \in E$ on obtient $\|x\|_E \leq D\|Tx\|_F$, i.e. ii).

ii) \implies i). Hypothèse ii) $\implies T$ injective et que $T^{-1} : T(E) \rightarrow E$ satisfait

$$\forall y \in T(E) : \|y\|_F \geq C\|T^{-1}y\|_E;$$

donc T^{-1} borné sur la boule unité de $T(E)$ par $1/C$, i.e. $T^{-1} : T(E) \rightarrow E$ continue. Montrons que $T(E)$ est fermé. Soit $y_n \in T(E)$ et $y \in F$ tq $\|y_n - y\|_F \rightarrow 0$. $\exists x_n \in E$ tq $Tx_n = y_n$. (Tx_n) est une suite de Cauchy, donc:

$$\|x_n - x_m\|_E = \|T^{-1}(Tx_n) - T^{-1}(Tx_m)\|_E \leq \|T^{-1}\|_{op}\|y_n - y_m\|_F \rightarrow 0$$

Donc (x_n) est une suite de Cauchy dans E . E complet $\implies \exists x \in E$ tq $\|x_n - x\|_E \rightarrow 0$. T continue $\implies y_n = Tx_n \rightarrow Tx \implies Tx = y \implies y \in T(E)$.

On a que $T^{-1} \circ T = id_E$. Donc $1 = \|id_E\|_{op} \leq \|T^{-1}\|_{op}\|T\|_{op}$. \circ

2.10 Corollaire Soit E un ev. Supposons que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ soient deux normes sur E tq $(E, \|\cdot\|_j)$ soient des espaces de Banach. Supposons que $\|\cdot\|_1$ domine $\|\cdot\|_2$, i.e. $\exists C > 0$ tq $\forall x \in E : \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$. Alors les deux normes sont équivalentes.

Dém. Considérons la bijection $I : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2)$ définie par $I(x) = x$. Alors I est linéaire et continue car $\|I(x)\|_2 \leq C\|x\|_1$. 2.8 $\implies I^{-1}$ continue, donc $\frac{1}{C}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 = \|I^{-1}(x)\|_1 \leq D\|x\|_2$. \circ

Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, soient $(E_j, \|\cdot\|_j)$ des espaces normés et $E = \prod_{j=1}^n E_j$ leur produit cartésien. Si $1 \leq p < \infty$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ on définit les normes $\|x\|_p = (\sum_{j=1}^n \|x_j\|_j^p)^{1/p}$ resp. $\|x\|_\infty = \max_j \|x_j\|_j$ sur E . Ces normes sont équivalentes. Ils engendrent la topologie du produit sur E .

Rappelons que si X et Y sont des espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une application, alors le graphe de f est l'ensemble $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$. Notons que si f est continue, alors le graphe est fermé, mais que la réciproque n'est pas correct ($f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.)

2.11 Lemma Soient E, F deux espaces normés et $f \in \ell(E, F)$. Alors le graphe de f est fermé \iff on a: $(x_n \rightarrow 0 \in E$ et $f(x_n) \rightarrow y \in F) \implies y = 0$.

Dém. " \implies " Supposons que $G(f)$ soit fermé et que $(x_n, f(x_n)) \rightarrow (0, y)$. Alors $(0, y) \in G(f)$, donc $y = f(0)$. Mais f linéaire $\implies f(0) = 0$. Donc $y = 0$.

" \impliedby " Soient $(x_n, f(x_n)) \in G(f)$ et supposons que $(x_n, f(x_n)) \rightarrow (x, y) \in E \times F$. Alors $x_n \rightarrow x$ et $f(x_n) \rightarrow y$. f linéaire $\implies x_n - x \rightarrow 0$ et $f(x_n - x) \rightarrow y - f(x)$. Hypothèse $\implies y - f(x) = 0$. Donc $y = f(x)$ et ainsi $(x, y) \in G(f)$. Donc $G(f)$ fermé. \circ

2.12 Théorème du graphe fermé Soient E et F des espaces de Banach et $T \in \ell(E, F)$. Alors T est continue \iff le graphe de T est fermé.

Dém. Il reste à démontrer que T est continue si $G(T)$ est fermé. Notons que $G(T)$ est un sous-espace vectoriel de $E \times F$. Donc $G(T)$ est un espace de Banach. Considérons

les projections $\pi_1 : \begin{cases} G(T) \rightarrow E \\ (x, y) \mapsto x \end{cases}$ et $\pi_2 : \begin{cases} G(T) \rightarrow F \\ (x, y) \mapsto y \end{cases}$.

π_1 et π_2 sont continues et linéaires et $\pi_2 = T \circ \pi_1$. En plus, π_1 est bijective. Donc, 2.8 $\implies \pi_1^{-1}$ continue et ainsi $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ est continue. \circlearrowright

III Opérateurs compacts

Définition Soient E, F des espaces normés. Un opérateur linéaire $T : E \rightarrow F$ est dite compact, si pour toute suite bornée (x_n) de E il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ de (x_n) telle que $(T(x_{n_k}))_k$ converge.

$$\mathcal{K}(E, F) := \{T : E \rightarrow F \mid T \text{ compact}\}.$$

$$\mathcal{K}(E) := \mathcal{K}(E, E).$$

3.1 Proposition Soient E, F des espaces normés et $T : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire. Si $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$, alors

$$T \text{ compact} \iff T(B) \text{ relativement compact, i.e. } \overline{T(B)} \text{ compact.}$$

Dém. " \Leftarrow " Soit $\|x_n\| \leq 1$. Alors $Tx_n \in T(B) \subseteq \overline{T(B)}$. Comme $\overline{T(B)}$ est (séquentiellement) compact, il existe une sous-suite (Tx_{n_k}) qui converge vers $y \in \overline{T(B)}$. Donc T est compact.

" \implies " Soit (y_n) une suite de $\overline{T(B)}$. Alors il existe $x_n \in B$, tel que $\|y_n - Tx_n\| \rightarrow 0$. T compact $\implies \exists y \in F$ tel que $\|Tx_{n_k} - y\| \rightarrow 0$. Ainsi

$$\|y_{n_k} - y\| \leq \|y_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|Tx_{n_k} - y\| \rightarrow 0.$$

Donc (y_n) contient une sous-suite convergente, i.e. $\overline{T(B)}$ est compact. \circlearrowright

3.2 Proposition (1) Chaque opérateur linéaire compact est continue, i.e. $\mathcal{K}(E, F) \subseteq L(E, F)$

(2) $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E, F)$

(3.1) $T \in L(E, F)$ et $S \in \mathcal{K}(F, G) \implies S \circ T \in \mathcal{K}(E, G)$

(3.2) $S \in \mathcal{K}(E, F)$ et $T \in L(F, G) \implies T \circ S \in \mathcal{K}(E, G)$

(4) $\mathcal{K}(E)$ est un idéal dans l'algèbre $L(E)$.

Dém. (1) T compact $\xrightarrow{3.1} \overline{T(B)}$ compact $\implies T(B)$ borné $\implies \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \leq C < \infty \implies T$ continue.

(2) trivial

(3.1) Soit $x_n \in E$ et $\|x_n\| \leq 1$. T continue $\implies \|Tx_n\| \leq \|T\|$; S compact $\implies S(Tx_{n_k})$ converge, i.e. $(S \circ T)(x_{n_k})$ converge; i.e. $S \circ T$ compact.

(3.2) Soit $x_n \in E$ et $\|x_n\| \leq 1$. S compact $\implies S(x_{n_k})$ converge; T continue $\implies T(S(x_{n_k}))$ converge; i.e. $(T \circ S)(x_n)$ admet une sous-suite convergente, donc $T \circ S$ compact.

(4) découle de (2) et (3.1). \circ

3.3 Proposition *Chaque opérateur linéaire continue de rang fini est compact.*

Dém Soit $\dim T(E) < \infty$. T continue $\implies \|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$. Donc l'image de $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ par T est borné. Bolzano-Weierstrass $\dim T(E) < \infty \implies T(B)$ relativement compact $\xrightarrow{3.1} T$ compact. \circ

3.4 Proposition *Soit E un espace normé, F un espace de Banach, $(T_n) \subseteq \mathcal{K}(E, F)$ et $T \in L(E, F)$ tel que $\|T_n - T\|_{op} \rightarrow 0$. Alors $T \in \mathcal{K}(E, F)$.*

Dém. Soit $x_n \in E$, $\|x_n\| \leq C$. T_1 compact $\implies \exists$ sous-suite (x_n^1) de (x_n) tel que $(T_1(x_n^1))$ converge. T_2 compact $\implies \exists$ sous-suite (x_n^2) de (x_n^1) tel que $(T_2(x_n^2))$ converge. Par récurrence on obtient une sous-suite (x_n^k) de (x_n^{k-1}) tel que $(T_k(x_n^k))_n$ converge. Considérons le schéma

$$\begin{array}{cccc} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \cdots \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

La suite diagonale $(y_j) := (x_j^j)$ est pour tout k , et à partir d'un certain indice $j = j(k)$, une sous-suite de (x_1^k, x_2^k, \dots) . Ainsi $(T_k(y_j))_j$ converge $\forall k$. (Procédé de Cantor). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que $\|T_{n_0} - T\|_{op} < \varepsilon$. En plus, $\exists N$ tel que $\forall j, k \geq N$ on a

$$\begin{aligned} \|Ty_j - Ty_k\| &\leq \|Ty_j - T_{n_0}y_j\| + \|T_{n_0}y_j - T_{n_0}y_k\| + \|T_{n_0}y_k - Ty_k\| \leq \\ &\leq \|T - T_{n_0}\|_{op} \cdot \|y_j\| + \varepsilon + \|T_{n_0} - T\|_{op} \cdot \|y_k\| \leq \varepsilon C + \varepsilon + \varepsilon C \end{aligned}$$

$\implies (Ty_j)$ est une suite Cauchy dans l'espace de Banach F . Elle converge. Donc T est compact. \circ

3.5 Corollaire *Soit E un espace normé, F un espace de Banach, $T \in L(E, F)$ et (T_n) une suite d'opérateurs linéaires continues à dimension fini tel que $\|T_n - T\|_{op} \rightarrow 0$. Alors T est compact.*

3.6 Corollaire *Si E est un espace normé et F un espace de Banach, alors $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace fermé de $L(E, F)$.*

Soit E un espace normé. Alors $(E^*, \|\cdot\|_{op})$ est un espace de Banach. On va maintenant d'écrire le procédé d'immersion de E dans son bidual topologique $E^{**} = (E^*)^*$. Pour $x \in E$ considérons $\Phi_x : \begin{cases} E^* \rightarrow \mathbb{K} \\ x^* \mapsto \Phi_x(x^*) := (x, x^*) \end{cases}$. Alors Φ_x est

linéaire, et continue car:

$$|\Phi_x(x^*)| = |(x, x^*)| \leq \|x^*\| \|x\| \implies \|\Phi_x\|_{op} \leq \|x\|.$$

On a même $\|\Phi_x\|_{op} = \|x\|$, car d'après Hahn-Banach (1.11)

$$\|\Phi_x\|_{op} = \sup_{\|x^*\|=1} |\Phi_x(x^*)| = \sup_{\|x^*\|=1} |(x, x^*)| = \|x\|.$$

Soit $J_E : \begin{cases} E \rightarrow E^{**} \\ x \mapsto \Phi_x \end{cases}$. Alors J_E est linéaire. En plus J_E est une isométrie, car $\|J_E(x)\| = \|\Phi_x\|_{op} = \|x\|$. Ainsi J_E est un homomorphisme isométrique de E dans E^{**} (immersion de E dans E^{**}). On peut donc considérer E comme un sous-espace normé de E^{**} .

Notons aussi que ceci implique que $J_E(E)$ est complet si E est complet; donc $J_E(E)$ est fermé dans E^{**} si E est un espace de Banach. En plus E Banach $\xrightarrow{(2.8)} J_E^{-1} : J_E(E) \rightarrow E$ continue.

Remarquons que J_E n'est pas toujours surjective. Si J_E est surjective, alors on dit que E est un espace réflexif (voir chapitre XX).

Pour conclure rappelons que J_E est donc définie par la formule suivante:

$$(x^*, J_E x) = (x, x^*) \quad \forall x \in E \quad \forall x^* \in E^*.$$

3.7 Lemme+déf. de l'opérateur bidual Soient E, F des espaces normés, $T \in L(E, F)$ et J_E resp. J_F les immersions canoniques de ces espaces dans leurs biduaux topologiques. L'opérateur bidual $T^{**} : E^{**} \rightarrow F^{**}$ de T est définie par: $T^{**} y^{**} = y^{**} \circ T^*$, $y^{**} \in E^{**}$. Alors le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} E^{**} & \xrightarrow{T^{**}} & F^{**} & & \\ J_E \uparrow & \nearrow & \uparrow J_F & & \\ E & \xrightarrow{T} & F & & \end{array}$$

i.e. $T^{**} \circ J_E = J_F \circ T$.

- T^{**} est l'opérateur dual associé à T^*
- T injective $\implies T^{**}$ injective sur $J_E(E)$.
- T^{**} linéaire, continue et $\|T^{**}\|_{op} = \|T^*\|_{op} = \|T\|_{op}$.

Dém • $x \in E, y^* \in F^* \implies$

$$\left(J_F(Tx) \right) (y^*) = (y^*, J_F(Tx)) \stackrel{\text{def. } J_F}{=} (Tx, y^*) = y^*(Tx) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \left(T^{**} \circ J_E(x) \right) (y^*) &= \left(J_E(x) \circ T^* \right) (y^*) \\ &= J_E(x)(y^* \circ T) = (y^* \circ T, J_E(x)) \stackrel{\text{def. } J_E}{=} (x, y^* \circ T). \end{aligned} \quad (2)$$

(1) et (2) $\implies J_F \circ T = T^{**} \circ J_E$.

- $T^{**}|_{J_E(E)} = J_F \circ T \circ J_E^{-1} \implies T^{**}|_{J_E(E)}$ injective si T injective.
- T^{**} continue: clair; l'égalité des normes découle de 1.15. ○

Remarque: $X \hookrightarrow X^{**}$, $Y \hookrightarrow Y^{**} \implies T^{**}$ est un prolongement de $T \in L(X, Y)$ avec valeurs dans Y^{**} .

3.8 Théorème de Schauder Soient X un espace normé, Y un espace de Banach et $T \in L(X, Y)$. Alors T est compact $\iff T^*$ compact.

Dém. " \implies " Soit (y_n^*) bornée par C dans Y^* et soit $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. T compact $\xrightarrow{3.1} K := \overline{TB} \subseteq Y$ compact. Soit $f_n := y_n^*|_K$. Alors $f_n \in C(K)$ et $\|f_n\|_\infty \leq CM$ car pour $y \in K$ on a: $|f_n(y)| = |(y, y_n^*)| \leq \|y_n^*\| \sup_{y \in K} \|y\| \leq CM$. Montrons que (f_n) est équicontinue. En effet, pour $y_1, y_2 \in Y$ on a:

$$|f_n(y_1) - f_n(y_2)| \leq \sup_n \|y_n^*\| \|y_1 - y_2\| \leq C \|y_1 - y_2\|.$$

Arzela-Ascoli $\implies \exists$ sous-suite (f_{n_ℓ}) qui converge uniformément sur K . En utilisant $(x, T^* y^*) = (Tx, y^*)$ et $T(B)$ dense dans K , on obtient:

$$\|T^* y_{n_\ell}^* - T^* y_{n_\ell}^*\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |y_{n_\ell}^*(Tx) - y_{n_\ell}^*(Tx)| = \|f_{n_\ell} - f_{n_\ell}\|_\infty.$$

Donc $(T^* y_{n_\ell}^*)$ est une suite de Cauchy dans X^* . Elle est convergente. Donc T^* est compact.

" \longleftarrow " T^* compact $\implies T^{**}$ compact $\implies T^{**} \circ J_X$ compact $\implies J_Y \circ T = T^{**} \circ J_X$ compact $\implies T$ compact car: soit (x_n) borné dans $X \implies J_Y(Tx_{n_k}) \in J_Y(Y)$ converge dans Y^{**} . Y Banach $\implies J_Y(Y)$ complet, donc fermé dans Y^{**} . Ainsi $J_Y(Tx_{n_k})$ converge dans $J_Y(Y)$. J_Y^{-1} continue $\implies Tx_{n_k}$ converge dans Y . ○

Rappel: X espace de Banach $\implies \mathcal{A} := L(X) \|\cdot\|_{op}$ algèbre unitaire de Banach; notons que $\|ST\|_{op} \leq \|S\|_{op} \|T\|_{op}$ et que $T \in L(X, Y)$ inversible dans $\mathcal{A} \iff \exists S \in \mathcal{A}$ tel que $ST = TS = I$, où $I(x) = x$ est l'identité. Soit $T \in \mathcal{A}$ bijective. Banach-Steinhaus $\implies T^{-1}$ continue, donc T inversible.

Rappelons aussi le lemme de Riesz qui nous dit qu'un espace normé E est localement compact $\iff \dim E < \infty$.

Déf. Soit X un evt, $M \subseteq X$ un sev fermé. On dit que M admet un supplémentaire topologique (ou est complémenté) s'il existe un sev fermé N de X tel que $X = M \oplus N$.

3.9 Lemme Soit E un espace normé, $M \subseteq E$ sev fermé. Alors sous chacune des conditions suivantes, M est complémenté:

- $\dim M < \infty$,
- $\text{codim } M := \dim(E/M) < \infty$.

Dém a) Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de M et $x \in M \implies \exists_1(\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) e_j \implies f_j : \begin{cases} M \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto \alpha_j(x) \end{cases}$ est linéaire et continue. D'après

Hahn-Banach, f_j admet un prolongement linéaire continue sur E , noté aussi par f_j .
Soit $N = \bigcap_{j=1}^n \text{Ker } f_j$. Alors $E = M \oplus N$.

b) Soit $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n\}$ une base de E/M et $x_k \in E$ telque $x_k \sim e_k$. Alors $N = \text{Vec}\{x_1, \dots, x_n\}$ est un sev fermé tel que $E = M \oplus N$. \circ

Déf. Soit X un espace normé et $T \in L(X)$. Le *spectre* $\sigma(T)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{K}$ telque $T - \lambda I$ ne soit pas inversible. Les éléments de $\sigma(T)$ sont appelés les *valeurs spectrales* de T . $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de T s'il existe $x \neq 0, x \in X$ tel que $Tx = \lambda x$. On voit bien que λ est valeur propre de $T \iff \lambda \in \sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I \text{ n'est pas injective}\}$ et que $\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$.

On va maintenant développer le théorie de Riesz-Schauder. Rappelons que $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ et que $R(T) = \{Tx : x \in X\}$.

3.10 Proposition Soient X et Y des espaces de Banach. Alors

- a) $T \in \mathcal{K}(X, Y), R(T)$ fermé $\implies \dim R(T) < \infty$.
- b) $T \in \mathcal{K}(X), \lambda \neq 0 \implies \dim \text{Ker } (T - \lambda I) < \infty$
- c) $\dim X = \infty, T \in \mathcal{K}(X) \implies 0 \in \sigma(T)$.

Dém. a) $R(T)$ fermé, Y Banach $\implies R(T)$ Banach $\xrightarrow{2.7} T : X \rightarrow R(T)$ ouverte $\implies 0 \in T(B^\circ) \subseteq \overline{T(B)} \subseteq R(T) \implies R(T)$ localement compact $\xrightarrow{\text{Riesz}} \dim R(T) < \infty$.

b) $M := \text{Ker } (T - \lambda I); T$ continue $\implies M$ sev fermé $\implies M$ Banach. Notons que $T(M) \subseteq M$, car $x \in M \implies Tx = \lambda x \in M$. Si $\lambda \neq 0$, alors $T|_M : M \rightarrow M$ est surjective. $T|_M$ compact $\xrightarrow{a)} \dim M = \dim R(T|_M) < \infty$.

c) $0 \notin \sigma(T) \implies T$ inversible $\implies T$ surjective $\implies R(T) = X \xrightarrow{a)} \dim X < \infty$. \circ

3.11 Lemme Soit X un espace normé, M un sev de X , M non dense, et $r > 1$. Alors $\exists x \in X, \|x\| < r$ tel que $\text{dist}(x, M) \geq 1$.

Dém. M non dense $\implies \exists x_1 \in X$ tel que $\text{dist}(x_1, M) = 1$. Choisir $y_1 \in M$ tel que $\|x_1 - y_1\| < r$. Posons $x := x_1 - y_1$. \circ

3.12 Lemme Soit X un espace de Banach, $T \in \mathcal{K}(X), r > 0, V \subseteq \sigma_p(T) \cap \{z \in \mathbb{K} : |z| > r\}$. Alors

- a) $\lambda \in V \implies R(T - \lambda I) \neq X$,
- b) V fini.
- c) $\sigma_p(T)$ est au plus dénombrable.

Dém. Notons d'abord que c) découle de b). Supposons maintenant que a) ou b) est faux. On va montrer qu'alors $\exists M_n \subseteq X, M_n$ sev fermé, $\exists \lambda_n \in V$ tel que:

- i) $M_n \subset M_{n+1}$, l'inclusion étant stricte.
- ii) $TM_n \subseteq M_n$.
- iii) $(T - \lambda_n I)(M_n) \subseteq M_{n-1}$.

En effet, si a) est faux, alors $S := T - \lambda_0 I$ est surjective pour un certain $\lambda_0 \in V$. Notons que $S \circ T = T \circ S$ et ainsi $S^n \circ T = T \circ S^n$. Posons $M_n = \text{Ker}(S^n)$. $\lambda_0 \in \sigma_p(T) \implies \exists x_1 \in M_1, x_1 \neq 0$. $R(S) = X \implies \forall n \exists x_n \in X$ tel que $S(x_{n+1}) = x_n$. Notons que $x_n \neq 0$ et que $x_{n+1} \in M_{n+1} \setminus M_n$, car $S^{n+1}(x_{n+1}) = S^n(S(x_{n+1})) = S^n(x_n) = \dots = S(x_1) = 0$ et $S^n(x_{n+1}) = S^{n-1}(S(x_{n+1})) = S^{n-1}(x_n) = \dots = S(x_2) = x_1$

Par conséquent, on a i)-iii) avec $\lambda_n := \lambda_0$.

Si b) est faux, alors $\exists \lambda_n \in V, \lambda_n \neq \lambda_j$. Soit e_n un vecteur propre associé à λ_n et $M_n = \text{Vec}\{e_1, \dots, e_n\}$. Alors i) est satisfait. Soit $x \in M_n \implies x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \implies Tx = \sum \alpha_j \lambda_j e_j \in M_n \implies TM_n \subseteq M_n$ et $(T - \lambda_n I)x = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_n) e_j \in M_{n-1} \implies$ ii) et iii).

Mais, 3.11 $\implies \forall n \geq 2 \exists y_n \in M_n$ tel que $\|y_n\| \leq 2$, $\text{dist}(y_n, M_{n-1}) \geq 1$ (d'après i). Pour $2 \leq m < n$ posons $z = Ty_m - (T - \lambda_n I)y_n$. Alors ii), iii) $\implies z \in M_{n-1}$ et $\|Ty_n - Ty_m\| = \|z - \lambda_n y_n\| = |\lambda_n| \|y_n - \lambda_n^{-1} z\| \geq |\lambda_n| \text{dist}(y_n, M_{n-1}) \geq |\lambda_n| > r$. Donc (Ty_n) n'admet pas de sous-suite convergente. Contradiction à la compacité de T . \circ

3.13 Théorème de Riesz-Schauder Soit X un espace de Banach, $T \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$, $S = T - \lambda I$ et $S^* = T^* - \lambda I$ l'opérateur dual associé à S . Alors

a) $R(S)$ et $R(S^*)$ sont fermés

b) Si

$$\alpha = \dim \text{Ker } S,$$

$$\beta = \text{codim } R(S),$$

$$\alpha^* = \dim \text{Ker } S^*,$$

$$\beta^* = \text{codim } R(S^*),$$

alors $\alpha, \beta, \alpha^*, \beta^*$ sont finis et coïncident.

c) $\lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 0 \implies \lambda \in \sigma_p(T)$ et $\lambda \in \sigma_p(T^*)$.

d) $\sigma(T)$ est non vide si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou si $\dim X = \infty$.

e) $\sigma(T)$ est compact, au plus dénombrable et si λ est un point d'accumulation de $\sigma(T)$, alors $\lambda = 0$.

Dém. a) Considérons le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{S} & R(S) \subseteq X \\ \pi \searrow & & \nearrow \hat{S} \\ & X/\text{Ker } S & \end{array}$$

Pour montrer que $R(S)$ est fermé, on va utiliser 2.9 et vérifier si $\|\hat{S}([x])\| \geq C \|[x]\|_{X/\text{Ker } S}$. Supposons qu'il existe x_n tel que $\|[x_n]\|_{X/\text{Ker } S} = 1$ et $S(x_n) = \hat{S}([x_n]) \rightarrow 0$. S.p.g. $\|x_n\| \leq 2$. T compact $\implies \exists x_{n_k} : T(x_{n_k}) \rightarrow y \implies \lambda x_{n_k} = -(T(x_{n_k}) - \lambda x_{n_k}) + T(x_{n_k}) = -S(x_{n_k}) + T(x_{n_k}) \rightarrow y \implies S(y) = \lambda \lim_k S(x_{n_k}) = 0 \implies [y] = [0] \implies \|[y]\|_{X/\text{Ker } S} = 0$. Mais $\|[x_{n_k}]\|_{X/\text{Ker } S} = 1 \implies \|[y]\|_{X/\text{Ker } S} = \lambda \lim_k \|[x_{n_k}]\|_{X/\text{Ker } S} = \lambda \neq 0$. Contradiction. Donc $\|\hat{S}([x])\| \geq C \|[x]\|_{X/\text{Ker } S}$

et d'après 2.9, $\hat{S}(X/\text{Ker } S) = S(X)$ est fermé. De même pour $S^*(X)$ car T^* est compact.

b) • 3.10(b) $\implies \alpha^* < \infty$ car T^* compact. $R(S)$ fermé $\xrightarrow{1.14} (X/R(S))^* \xrightarrow{\cong} R(S)^\perp$. En plus, 1.16 $\implies R(S)^\perp = \text{Ker } S^*$. Donc $(X/R(S))^* \xrightarrow{\cong} \text{Ker } S^*$. $\implies \dim (X/R(S))^* = \dim \text{Ker } S^* = \alpha^* < \infty \implies \beta = \dim X/R(S) \stackrel{1.9}{=} \dim (X/R(S))^* = \alpha^*$.

• a) $\implies R(S^*) = \overline{R(S^*)} \stackrel{1.13}{=} (\perp R(S^*))^\perp \stackrel{1.16(1)}{=} (\text{Ker } S)^\perp \stackrel{1.14(1)}{=} X^*/R(S^*) = X^*/(\text{Ker } S)^\perp \xrightarrow{\cong} (\text{Ker } S)^* \implies \beta^* = \dim X^*/R(S^*) = \dim (\text{Ker } S)^* \stackrel{1.9}{=} \dim \text{Ker } S = \alpha < \infty$.

On a montré que $\beta = \alpha^*$ et $\beta^* = \alpha$. Reste à vérifier que $\alpha \leq \beta$, car dans ce cas, par un raisonnement analogue dû à la compacité de T^* , on aura aussi $\alpha^* \leq \beta^*$. Donc, en vue de la ligne précédente, $\beta \leq \alpha$ et ainsi $\alpha = \beta$.

Supposons que $\alpha > \beta$. On sait déjà que $\alpha = \dim \text{Ker } S < \infty$. Donc $\beta = \text{codim } R(S) < \infty$. 3.9 $\implies \exists$ sev fermés E et F tel que $X = \text{Ker } S \oplus E = R(S) \oplus F$. Soit $x = \xi + \eta \in \text{Ker } S + E$. Considérons la projection $P : X \rightarrow \text{Ker } S$ définie par $P(x) = \xi$. P est linéaire et le graphe de P est fermé. En effet supposons que $x_n = \xi_n + \eta_n \rightarrow x$ et que $P(x_n) \rightarrow y$. Alors $\xi_n \rightarrow y$ et ainsi $\eta_n = x_n - \xi_n \rightarrow x - y$. $\text{Ker } S$ fermé $\implies y \in \text{Ker } S$. E fermé, $\eta_n \in E \implies x - y \in E \implies x = y + (x - y) \in \text{Ker } S + E$. Unicité de la décomposition $\implies P(x) = y$. Comme X est complet, 2.12 $\implies P$ continue.

Notre hypothèse $\infty > \alpha = \dim \text{Ker } S > \beta = \dim F \geq 0$ implique qu'il existe une application linéaire surjective $\varphi \in \ell(\text{Ker } S, F)$ tel que $\varphi(x_0) = 0$ pour un $x_0 \neq 0$, $x_0 \in \text{Ker } S$. Les dimensions étant finies, on a que φ est continue. Posons $\Phi = T + \varphi \circ P$. Alors $\Phi \in L(X)$. $\dim R(\varphi) < \infty \implies \varphi \circ P$ compact. T compact $\implies \Phi = T + \varphi \circ P$ compact. On a que $\Phi - \lambda I = S + \varphi \circ P$. On va voir que λ est une valeur propre de Φ . En effet, $x_0 \in \text{Ker } S \implies Px_0 = x_0 \implies (\varphi \circ P)(x_0) = 0 \implies (\Phi - \lambda I)(x_0) = 0$. Donc $\lambda \in \sigma_p(\Phi)$. Φ compact $\xrightarrow{3.12} R(\Phi - \lambda I) \neq X$.

D'autre part, $x \in E \implies P(x) = 0 \implies (\Phi - \lambda I)(E) = S(E) = S(X) = R(S)$ et $x \in \text{Ker } S \implies P(x) = x \implies (\Phi - \lambda I)(\text{Ker } S) = \varphi(\text{Ker } S) = F$.

Donc $R(\Phi - \lambda I) = R(S) + F = X$, une contradiction.

c) Soit $\lambda \neq 0$. Si λ n'est pas une valeur propre de T , alors $\text{Ker } S = \{0\}$. Ainsi $\beta = \alpha = 0$ et donc $R(S) = X$. 2.8 $\implies S$ inversible, i.e $T - \lambda I$ inversible $\implies \lambda \notin \sigma(T)$. Donc: $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0 \implies \lambda \in \sigma_p(T)$. De même pour T^* .

d) Si $\dim X = \infty$, alors d'après 3.10, $0 \in \sigma(T)$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\dim X = n$, alors les valeurs propres sont données par les racines du polynôme caractéristique de T , donc $\emptyset \neq \sigma_p(T)$. En vue de T est injective $\iff T$ surjective dans le cas où $\dim X = n$, on a en plus que $\sigma_p(T) = \sigma(T)$.

e) Lemme 3.12 \implies que $\sigma_p(T)$ admet au plus 0 comme point d'accumulation et est dénombrable. Mais c) $\implies \sigma_p(T) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$. Donc $\sigma(T)$ est au plus dénombrable. Si $\dim X$ est fini, alors $\sigma(T)$ est fini (ou vide), donc compact; si $\dim X = \infty$, alors $0 \in \sigma(T)$ et on conclut que $\sigma(T)$ est compact, non vide.

Ainsi T compact $\implies \sigma(T)$ vide ou fini ou bien $\sigma(T) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ avec $0 \neq \lambda_n \rightarrow 0$. \circ

Remarque On voit aussi que pour $\lambda \neq 0$ et $T \in \mathcal{K}(X)$ l'opérateur $T - \lambda I$ est surjectif $\iff T - \lambda I$ est injectif. Pour $\lambda = 0$ ceci n'est plus vrai (voir les TD).

3.14 Théorème, l'alternative de Fredholm Soit X un espace de Banach, $T \in \mathcal{K}(X)$, et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Alors ou bien l'équation homogène

$$Tx - \lambda x = 0$$

ne possède que la solution triviale 0 et dans ce cas l'équation inhomogène

$$Tx - \lambda x = y$$

possède pour tout $y \in X$ une solution unique, ou bien les équations homogènes

$$Tx - \lambda x = 0 \quad \text{et} \quad T^*x - \lambda x = 0$$

ont n solutions linéairement indépendantes ($n = n(\lambda)$), et l'équation inhomogène

$$Tx - \lambda x = y$$

a une solution $\iff y \in {}^\perp \text{Ker}(T^* - \lambda I)$.

Dém. Le premier cas découle de la remarque ci-dessus. Le deuxième cas est une conséquence du fait qu'un opérateur $S \in L(X)$ sur un espace de Banach dont $R(S)$ est fermé a la propriété que $Sx = y$ possède une solution $\iff [S^*y^* = 0 \implies (y, y^*) = 0]$. Notons que ceci est vrai dû au fait que ${}^\perp(\text{Ker } S^*) = \overline{R(S)}$, voir 1.16.

Soit E un espace de Banach et $T \in L(E)$. Est-ce que $\sigma(T) \neq \emptyset$? Est-ce que $\sigma(T)$ est fermé? compact? Les réponses vont être données dans le chapitre suivant.

IV Algèbres de Banach

Déf. Soit A un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . En plus, soit $\bullet : A \times A \rightarrow A$ une opération dite *multiplication* définie sur A tel que $(A, +, \bullet)$ soit un anneau et tel que $\alpha(xy) = x(\alpha y) = (\alpha x)y \quad \forall x, y \in A, \alpha \in \mathbb{K}$. Alors A s'appelle algèbre sur \mathbb{K} . A est commutative si $xy = yx \quad \forall x, y \in A$. A est une algèbre *unitaire* s'il existe

$e \in A$ tel que $ex = xe = x \quad \forall x \in A$. e est déterminé de façon unique s'il existe. Si en plus A est muni d'une norme $\|\cdot\|$ tel que $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, alors A est une algèbre normée réelle ou complexe. Si $\|\cdot\|$ est complet, alors $(A, +, \cdot, \bullet, \|\cdot\|)$ est une algèbre de Banach. Si A possède un élément unitaire e , alors on exige que $\|e\| = 1$. Dans ce cas on dit qu'un élément $x \in A$ est *inversible* s'il existe $x^{-1} \in A$ tel que $xx^{-1} = x^{-1}x = e$. L'inverse x^{-1} de x est déterminé de façon unique (s'il existe). L'ensemble des éléments inversibles muni de la multiplication est un groupe et est noté par $G(A)$. Notons que si $a, b \in G(A)$ alors $ab \in G(A)$ et $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Soit $x \in A$. Alors $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{K} : x - \lambda e \notin G(A)\}$ est le spectre de x . Le rayon spectral $r(x)$ de x est le nombre $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$. $\rho(x) = \mathbb{K} \setminus \sigma(x)$ est l'ensemble résolvant de x , l'application $R(x; \cdot) : \rho(x) \rightarrow A$, définie par $R(x; \lambda) = (x - \lambda e)^{-1}$ est la résolvante de x .

Si E est un espace de Banach, alors $(L(E), \|\cdot\|_{op})$ est une algèbre de Banach unitaire; ici e est l'application identité et, d'après 2.8, $T \in L(E)$ est inversible \iff T est bijective.

4.1 Proposition Soit A une algèbre de Banach unitaire et $x \in A$. Supposons que $\|x\| < 1$. Alors $e - x \in G(A)$,

$$(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (x^0 := e)$$

et

$$\|(e - x)^{-1} - e - x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}.$$

Dém. Posons $s_n := e + x + x^2 + \dots + x^n$. Comme $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ et que $\|x\| < 1$ on obtient que

$$\|s_{n+k} - s_n\| \leq \|x\|^{n+1} + \dots + \|x\|^{n+k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

i.e. (s_n) est une suite de Cauchy dans A . A complet $\implies \exists s \in A : \|s_n - s\| \rightarrow 0$. En plus, $s_n(e - x) = e - x^{n+1} = (e - x)s_n$.

Donc, dû à la continuité de la multiplication, $s(e - x) = (e - x)s = e$, i.e. $e - x \in G(A)$ et $s = (e - x)^{-1}$. Finalement,

$$\|s - e - x\| = \|x^2 + x^3 + \dots\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \|x\|^n = \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}.$$

○

4.2 Lemme Soit A une algèbre de Banach unitaire, $x \in G(A)$, $h \in A$. Supposons que $\|h\| < \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$. Alors $x + h \in G(A)$ et

$$\|(x + h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2.$$

Dém. Notons que $x+h = x(e+x^{-1}h)$ et que $\|x^{-1}h\| < \frac{1}{2}$. 4.1 $\implies e+x^{-1}h \in G(A)$. Donc $x+h \in G(A)$. En plus

$$\begin{aligned} \|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| &= \|[(e+x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h]x^{-1}\| \\ &\leq \|x^{-1}\| \frac{\|x^{-1}h\|^2}{1 - \|x^{-1}h\|} < 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2. \end{aligned}$$

○

4.3 Théorème Soit A une algèbre de Banach unitaire. Alors $G(A)$ est ouvert, et l'application $\text{Inv} : G(A) \rightarrow G(A)$, $\text{Inv } x := x^{-1}$ est un homéomorphisme.

Dém. 4.2 $\implies G(A)$ ouvert. Si $x \in G(A)$ on a :

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2 + \|x^{-1}\|^2\|h\| \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0.$$

Donc Inv est continue. Comme $\text{Inv}^{-1} = \text{Inv}$, on a que Inv est un homéomorphisme. ○

4.4 Théorème Soit A une algèbre de Banach unitaire et $x \in A$. Alors $\sigma(x)$ est compact et $r(x) \leq \|x\|$.

Dém. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $|\lambda| > \|x\|$. 4.1 $\implies e - \lambda^{-1}x \in G(A) \implies x - \lambda e = -\lambda(e - \lambda^{-1}x) \in G(A) \implies \lambda \notin \sigma(x) \implies r(x) \leq \|x\| \implies \sigma(x)$ borné. Soit $(\lambda_n) \in \sigma(x)$ et $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Alors $x - \lambda_n e \notin G(A)$ et $x - \lambda_n e \rightarrow x - \lambda e$. $G(A)$ ouvert $\implies A \setminus G(A)$ fermé $\implies x - \lambda e \notin G(A) \implies \lambda \in \sigma(x)$. Donc $\sigma(x)$ est fermé. ○

Déf Soit X un evt, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et $f : \Omega \rightarrow X$. f s'appelle *faiblement holomorphe* si $\varphi \circ f \in H(\Omega) \forall \varphi \in X^*$.

4.5 Proposition Soit A une algèbre de Banach unitaire complexe et $x \in A$. Alors la résolvante $R(x; \cdot) : \rho(x) \rightarrow A$ est faiblement holomorphe sur l'ensemble résolvant $\rho(x)$. En plus, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\varphi \circ R(x; \cdot))(\lambda) = 0 \forall \varphi \in A^*$.

Dém. Soit $\lambda \in \rho(x)$, $\varphi \in A^*$ et $f := \varphi \circ R$. Appliquons 4.2 à $x - \lambda e$ au lieu de x et à $(\lambda - \mu)e$ au lieu de h avec $|\lambda - \mu|$ petit. Ainsi

$$\|(x - \mu e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1} + (\lambda - \mu)(x - \lambda e)^{-2}\| \leq C|\mu - \lambda|^2.$$

Donc

$$\frac{1}{\mu - \lambda} [(x - \mu e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1}] \rightarrow (x - \lambda e)^{-2} \quad (\mu \rightarrow \lambda).$$

En composant avec φ , on obtient

$$\frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} \rightarrow \varphi((x - \lambda e)^{-2}) \quad (\mu \rightarrow \lambda).$$

Donc f est \mathbb{C} -différentiable en λ avec $f'(\lambda) = \varphi((x - \lambda e)^{-2})$.

4.3 $\implies \lambda f(\lambda) = \varphi(\lambda(x - \lambda e)^{-1}) = \varphi((\lambda^{-1}x - e)^{-1}) \rightarrow \varphi(-e) = -\varphi(e) \quad (\lambda \rightarrow \infty)$.

On conclut que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) = 0$. ○

4.6 Théorème Soit A une algèbre de Banach unitaire complexe et $x \in A$. Alors $\sigma(x) \neq \emptyset$.

Dém. Soit $\lambda_0 \in \rho(x)$. Alors $(x - \lambda_0 e)^{-1} \neq 0$. Hahn-Banach $\implies \exists \varphi \in A^*$ tel que $f(\lambda_0) \neq 0$, où $f = \varphi \circ R(x; \cdot)$. Supposons que $\sigma(x) = \emptyset$. 4.4 $\implies f$ est une fonction entière avec $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) = 0$. D'après le théorème de Liouville $f \equiv 0$, une contradiction. ○

4.7 Théorème Soit A une algèbre de Banach unitaire complexe. Alors

$$r(x) = \lim \|x^n\|^{1/n} = \inf \|x^n\|^{1/n}.$$

Dém.: Voir Rudin.

V - FORMES LINÉAIRES CONTINUES SUR DES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES - SÉPARATION D'ENSEMBLES CONVEXES

A - Préliminaires

Théorème 5.1

Soit E evt. et $l \in l(E, \mathbb{K})$, $l \neq 0$, une forme linéaire. Alors sont équivalentes :

- 1) l continue
- 2) $\text{Ker } l$ fermé
- 3) $\text{Ker } l$ n'est pas dense dans E
- 4) $\exists V$ voisinage $\in \mathcal{U}(0)$ t.q. l bornée sur V
- 5) l est continue à l'origine.

Démonstration

- (1) \implies (2) : $\text{Ker } l = l^{-1}(\{0\})$ fermé

- (2) \implies (3) : $l \neq 0 \implies \text{Ker } l \neq E$

- (3) \implies (4)

Hyp. $\implies \exists x_0 \in (E \setminus \text{Ker } l)^0 \neq \emptyset \implies \exists$ voisinage W de x_0 t.q. $W \cap \text{Ker } l = \emptyset$ (**)

$W = x_0 + U$ où $U \in \mathcal{U}(0)$. Comme la multiplication par un scalaire est continue, $\exists \delta > 0$, et $\tilde{U} \in \mathcal{U}(0)$, \tilde{U} ouvert, t.q. $\alpha \tilde{U} \subseteq U \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ t.q. } |\alpha| < \delta$.

Posons $V := x_0 + \tilde{V}$ où $\tilde{V} = \bigcup_{|\alpha| < \delta} \alpha \tilde{U} \implies V \in \mathcal{U}(x_0)$.

On a $x \in \tilde{V} \implies \lambda x \in \tilde{V} \quad \forall |\lambda| \leq 1$ (*)

De plus, $l(\tilde{V})$ borné dans \mathbb{K} car : supposons que $l(\tilde{V})$ soit non borné $\implies l(\tilde{V}) = \mathbb{K}$ car :

Soit $t \in \mathbb{K}, t \neq 0$. Hyp. $\implies \exists x_t \in \tilde{V}$ t.q. $|l(x_t)| \geq |t|$.

Soit $\lambda := \frac{t}{l(x_t)} \implies |\lambda| \leq 1 \stackrel{(*)}{\implies} \lambda x_t \in \tilde{V}$ et $l(\lambda x_t) = t$.

$l(\tilde{V}) = \mathbb{K} \implies \exists y \in \tilde{V}$ t.q. $l(y) = -l(x_0)$

$$\Rightarrow \underbrace{x_0 + y}_{\in x_0 + \tilde{V} = V} \in \text{Ker } l \Rightarrow V \cap \text{Ker } l \neq \emptyset$$

or $V \cap \text{Ker } l \subseteq (x_0 + U) \cap \text{Ker } l \subseteq W \cap \text{Ker } l$. Contradiction à (**).

Conclusion: $l(\tilde{V})$ borné $\Rightarrow l(V)$ borné \Rightarrow (4).

- (4) \Rightarrow (5)

Hyp. $\Rightarrow \exists V \in \mathcal{U}(0), \exists M > 0$ t.q. $\forall x \in V : |l(x)| < M$

Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow |l(x)| < \varepsilon$ si $x \in U := \frac{\varepsilon}{M} V \in \mathcal{U}(0)$

$\Rightarrow l$ continue en 0.

- (5) \Rightarrow (1)

Soit $x_0 \in E$ et K voisinage de $l(x_0)$ dans \mathbb{K} . $K = l(x_0) + \tilde{K}$, \tilde{K} voisinage de 0 dans \mathbb{K} .

l continue en $0_E \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}(0_E)$ t.q. $l(U) \subseteq \tilde{K}$

$\Rightarrow l(x_0 + U) = l(x_0) + l(U) \subseteq l(x_0) + \tilde{K} = K$

$\Rightarrow l$ continue en x_0 . ○

Proposition 5.2

E evt., $l \neq 0$ forme linéaire sur E , (donc $l \in l(E, \mathbb{K})$). Alors l est ouverte (ie $l(U)$ ouvert \forall ouvert U).

Démonstration

Comme $l \neq 0, \exists x_0 \in E$ t.q. $l(x_0) = 1 \in \mathbb{K}$. Soit U ouvert dans E et $w_1 \in l(U) \subseteq \mathbb{K}$.

$\Rightarrow \exists x_1 \in U$ t.q. $l(x_1) = w_1$.

U ouvert, \oplus et \cdot continues $\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$ t.q. $x_1 + \xi x_0 \in U \forall \xi \in \mathbb{K}$ avec $|\xi| < \varepsilon_0$

$\Rightarrow w_1 + \xi \cdot 1 = l(x_1) + \xi l(x_0) = l(x_1 + \xi x_0) \in l(U) \quad \forall |\xi| < \varepsilon_0 \quad \Rightarrow B(w_1, \varepsilon_0) \subseteq$

$l(U) \Rightarrow w_1$ point intérieur de $l(U) \Rightarrow l(U)$ ouvert. ○

Définition

E espace vectoriel sur \mathbb{K}

1) $C \subseteq E$ convexe si $\forall x, y \in C : 0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha x + (1 - \alpha)y \in C$

2) $M \subseteq E$ absorbant si $\forall x \in E, \exists \alpha_0 > 0$ t.q. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, |\alpha| \geq \alpha_0 \Rightarrow x \in \alpha M$

3) $M \subseteq E$ équilibré (balanced, kreisförmig) si $\lambda M \subseteq M \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1$.

Remarques: (exo.)

a) M absorbant $\Rightarrow 0_E \in M$.

b) M équilibré $\Rightarrow \alpha M = |\alpha| M \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

c) Si E est evt, alors [M équilibré $\Rightarrow M^0$ équilibré].

Lemme 5.3

E espace vectoriel sur \mathbb{K} . $\tilde{C}, C \subseteq E$ convexes. Alors

1) $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, x + C, \alpha C$ convexes.

2) C_λ convexes $\Rightarrow \bigcap_\lambda C_\lambda$ convexe.

3) $\alpha, \beta \geq 0 \Rightarrow (\alpha + \beta)C = \alpha C + \beta C$

- 4) $C + \tilde{C}$ convexe.
 5) C^0 et \overline{C} convexes si E evt.

Démonstration

(1),(2),(4) clairs.

(3) clair pour $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$

$$\text{si } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0 \Rightarrow (\alpha + \beta)C \subseteq \alpha C + \beta C$$

$$C \text{ convexe} \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha+\beta}C + \frac{\beta}{\alpha+\beta}C \subseteq C$$

$$\Rightarrow \alpha C + \beta C \subseteq (\alpha + \beta)C \Rightarrow (3)$$

(5),(6) exo. ○

Proposition 5.4

Soit E evt. Alors chaque voisinage U de 0_E est absorbant.

Démonstration

Soit $x \in E$. Si $x = 0_E$ alors $0_E = \alpha 0_E \in U, \forall \alpha \in \mathbb{K} \forall U \in \mathcal{U}(0_E)$.

Si $x \neq 0_E$ $\overset{\text{continue}}{\implies} \exists \varepsilon > 0$ t.q. $\alpha x \in U, \forall |\alpha| \leq \varepsilon$. Alors $x \in \beta U \quad \forall |\beta| \geq \frac{1}{\varepsilon}$ ○

Proposition 5.5

E evt. Alors chaque voisinage U de 0_E contient un voisinage de 0_E qui est équilibré.

Démonstration

Soit $U \in \mathcal{U}(0_E) \overset{\text{continue}}{\implies} \exists \delta > 0, \exists V \in \mathcal{U}(0_E), V$ ouvert tq $\forall \alpha \in \mathbb{K} : |\alpha| \leq \delta \implies \alpha V \subseteq U$.

Posons $W := \bigcup_{|\alpha| \leq \delta} \alpha V \Rightarrow W$ ouvert, $0_E \in W \subseteq U$.

W est équilibré car : soit $|\beta| \leq 1, x \in W \Rightarrow \beta x \in \beta W$ et $x \in \alpha V$ pour un $|\alpha| \leq \delta \Rightarrow \beta x \in \beta \alpha V$.

Comme $|\beta \alpha| \leq |\alpha| \leq \delta$ on a : $\beta \alpha V \subseteq W \Rightarrow \beta x \in W \Rightarrow \beta W \subseteq W$. ○

Définition

E espace vectoriel sur $\mathbb{K}, M \subseteq E$ absorbant. Alors

$$p_M(x) = \inf \{ \alpha > 0 : x \in \alpha M \} \quad (x \in E)$$

s'appelle jauge (ou fonctionnelle) de Minkowski associée à M .

Remarque

- 1) $\forall x \in E$, on a $0 \leq p_M(x) < \infty$ car M absorbant
- 2) si $(E, \| \cdot \|)$ espace normé alors $p_B(x) = \|x\|$ où B est la boule unité de E .

Théorème 5.6

Soit E espace vectoriel.

(1) $C \subseteq E$ convexe, absorbant $\Rightarrow p_C$ est sublinéaire.

(2) Si p est une semi-norme sur E , alors $B = \{x \in E : p(x) < 1\}$ est convexe, absorbant et équilibré et $p = p_B$.

- (3) Si C est convexe, absorbant et équilibré, alors p_C semi-norme.
(4) E evt., $U \in \mathcal{U}(0_E)$ convexe $\Rightarrow U = \{x \in E : p_U(x) < 1\}$
(5) E evt., U absorbant, équilibré $\Rightarrow \{p_U < 1\} \subseteq U \subseteq \{p_U \leq 1\}$
(6) E evt., U absorbant, équilibré : $U \in \mathcal{U}(0_E) \Leftrightarrow B \in \mathcal{U}(0_E)$ où $B = \{p_U < 1\}$.
(7) E evt., U absorbant, équilibré, ouvert $\Rightarrow U = \{x \in E : p_U(x) < 1\}$.

Démonstration

1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha, \beta > 0$ t.q. $p_c(x) \leq \alpha < p_c(x) + \varepsilon$ si $x \in \alpha C$ et $p_c(y) \leq \beta \leq p_c(y) + \varepsilon$ si $y \in \beta C$.

C convexe $\xrightarrow{5.3} x + y \in (\alpha + \beta)C$

$\Rightarrow p_c(x + y) \leq \alpha + \beta \leq p_c(x) + p_c(y) + 2\varepsilon$

$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} p_c(x + y) \leq p_c(x) + p_c(y)$

- si $\lambda = 0$: $p_c(0 \cdot x) = p_c(0_E) = \inf \{\alpha > 0 : 0_E \in \alpha C\} = 0$, car $0_E \in C$ (C absorbant).

Comme $0 \cdot p_c(x) = 0$ on obtient l'assertion.

- si $\lambda > 0$: $p_c(\lambda x) = \inf \{\alpha > 0 : x \in \frac{\alpha}{\lambda} C\} \stackrel{\beta = \frac{\alpha}{\lambda}}{=} \lambda \inf \{\beta > 0 : x \in \beta C\} = \lambda p_c(x)$

2) B convexe car $p(x) < 1, p(y) < 1, 0 \leq t \leq 1$

$\Rightarrow p(tx + (1-t)y) \stackrel{\text{semi-norme}}{\leq} p(tx) + p((1-t)y) = t \underbrace{p(x)}_{<1} + (1-t) \underbrace{p(y)}_{<1} < 1$

- B équilibré car : $x \in B, |\alpha| \leq 1, \alpha \neq 0 \Rightarrow p(\alpha x) \stackrel{\text{semi-norme}}{=} |\alpha| p(x) \underset{\alpha \neq 0}{<} |\alpha| \cdot 1 \leq 1 \Rightarrow \alpha x \in B$.

En plus $0_E \in B$ et $p(0x) = p(0_E) = 0$. Donc B est équilibré.

- B absorbant car : soit $x \in E, \alpha_0 > p(x)$

$$\alpha \in \mathbb{K} \text{ t.q. } |\alpha| \geq \alpha_0 \Rightarrow p\left(\frac{1}{\alpha}x\right)$$

$$\stackrel{\text{s.n.}}{=} \frac{1}{|\alpha|} p(x) \leq \frac{1}{\alpha_0} p(x) < 1$$

$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}x \in B \Rightarrow x \in \alpha B$.

- $p = p_B : p_B(x) = \inf \{\alpha > 0 : x \in \alpha B\}$ (B abs.)

$= \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in B \right\} = \inf \left\{ \alpha > 0 : p\left(\frac{x}{\alpha}\right) < 1 \right\}$

$\stackrel{\text{s.n.}}{=} \inf \{\alpha > 0 : p(x) < \alpha\} = p(x)$

3) hyp. $\stackrel{(1)}{\Rightarrow} p_c$ sublinéaire. Soit $\beta \in \mathbb{K}, \beta \neq 0$.

$$p_c(\beta x) = \inf \{t > 0, \beta x \in tC\} = \inf \left\{ t > 0, x \in \frac{t}{\beta}C \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{C \text{ \u00e9q.}}{=} \inf \left\{ t > 0, x \in t \left(\frac{1}{|\beta|} C \right) \right\} \\
& = |\beta| \inf \left\{ \frac{t}{|\beta|} > 0 : x \in \frac{t}{|\beta|} C \right\} = |\beta| p_c(x)
\end{aligned}$$

$\implies p_c$ semi-norme.

4) $U \in \mathcal{U}(0_E) \stackrel{5.4}{\implies} U$ absorbant $\implies p_U$ bien d\u00e9finie.

Soit $p_U(x) < 1 \implies \exists \alpha > 0$ t.q. $p_U(x) \leq \alpha < 1$ et $x \in \alpha U$, disons $x = \alpha y$, $y \in U$.

U convexe $\implies x = \alpha y + (1 - \alpha) 0_E \in U$

$\implies \{p_U < 1\} \subseteq U$.

- Soit $x \in U$, $0_E \in U$, $x = x + 0_E \in U$

\oplus continue $\implies \exists$ voisinage V de 0_E dans E t.q. $x + V \subseteq U$.

Comme $0_E = 0 \cdot x \in V$ et mult. scalaire continue $\exists \delta > 0$ t.q. $\delta x \in V$ et $x + \delta x = (1 + \delta)x \in U \implies p_U(x) \leq \frac{1}{1 + \delta} < 1 \implies U = \{p_U < 1\}$

5) - $x \in E$, $p_U(x) < 1 \implies \exists \alpha \in]0, 1[$ t.q. $x \in \alpha U$

$\implies \frac{x}{\alpha} \in U$.

U \u00e9quilibr\u00e9 $\stackrel{|\alpha| \leq 1}{\implies} x = \alpha \cdot \frac{x}{\alpha} \in U$

$\implies \{p_U < 1\} \subseteq U$.

- $x \in U \implies x \in 1 \cdot U \implies p_U(x) = \inf \{\alpha > 0 : x \in \alpha U\} \leq 1$

$\implies U \subseteq \{p_U \leq 1\}$

6) " \implies " $U \in \mathcal{U}(0_E) \implies \exists$ ouvert \tilde{U} t.q. $0_E \in \tilde{U} \subseteq U$.

Soit $x \in \tilde{U} \implies \exists \varepsilon > 0$ t.q. $x + \varepsilon x = (1 + \varepsilon)x \in \tilde{U} \subseteq U$

$\implies p_U(x) \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1 \implies \tilde{U} \subseteq B \implies B \in \mathcal{U}(0_E)$

" \impliedby " $B \in \mathcal{U}(0_E) \stackrel{(5)}{\implies} 0_E \in B \subseteq U$
(U \u00e9quil.)

$\implies U \in \mathcal{U}(0_E)$

7) $B \subseteq U$ (\u00e9quil.) $\stackrel{(5)}{\implies} 0_E \in U \subseteq B$ (voir d\u00e9m. 6 " \implies ", $\tilde{U} \rightarrow U$) \(\circ\)
(abs.)

Proposition 5.7

Soient E evt. et $U \subseteq E$ absorbant, \u00e9quilibr\u00e9 et convexe. Alors U est un voisinage de $0_E \Leftrightarrow p_U$ continue sur E .

D\u00e9monstration

" \Leftarrow " $[0, 1[$ ouvert dans $[0, +\infty[$, p_U continue $\implies B = \{p_U < 1\} = p_U^{-1}([0, 1[)$ ouvert (dans E).

$0_E \in B \subseteq U \stackrel{(5)}{\implies} U \in \mathcal{U}(0_E)$.
(B ouvert)

" \Rightarrow " $\alpha > 0$, $p_U^{-1}([0, \alpha]) = \{x : p_U(x) < \alpha\} = \alpha B$ car p_U semi-norme. (5.6, (3))

$U \in \mathcal{U}(0_E) \stackrel{(6)}{\implies} B \in \mathcal{U}(0_E) \implies \alpha B \in \mathcal{U}(0_E)$

$\implies p_U$ continue en 0_E .
 Enfin $|p_U(x) - p_U(y)| \stackrel{5.6(1),(3)}{\leq} p_U(x-y) \Rightarrow p_U$ continue sur E . ○

B - Théorèmes de Hahn-Banach (versions géométriques)

$$x_0 + \text{Ker } u = \{x \in E : u(x) = u(x_0)\}$$

5.8 : 1er théorème de séparation

E evt., $A, B \subseteq E$, $A, B \neq \emptyset$, convexes, $A \cap B = \emptyset$, A ouvert.

Alors $\exists L \in E^*$, $\exists \gamma \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall a \in A, \forall b \in B \quad \text{Re } L(a) < \gamma \leq \text{Re } L(b)$

Démonstration

- 1 - E réel, $a_0 \in A, b_0 \in B, x_0 := b_0 - a_0$. Posons $C := A + x_0 - B \implies 0_E \in C$.
 C convexe (5.3) et C ouvert car

$$C = \underbrace{\bigcup_{b \in B} \left(\underbrace{A}_{\text{ouvert}} + \underbrace{x_0 - b}_{\substack{\text{transl. de } A \\ = \text{homéomorph.}}} \right)}_{\text{ouvert}} \text{ ouvert.}$$

$x_0 \notin C$ (sinon $A \cap B \neq \emptyset$).

Soit $p = p_C$ la fonctionnelle de Minkowski associée à C (notons que cela est bien déf. car $C \in \mathcal{U}(0_E)$, donc, d'après 5.4 absorbant)

$$5.6(4) \quad C \xrightarrow{\text{conv.}} C = \{x : p(x) < 1\} \quad (*)$$

En particulier $p(x_0) \geq 1$. Soit $F = x_0 \mathbb{R} = \text{Vect}\{x_0\}$, $x = \alpha x_0 \in F$.

Sur F on définit une forme linéaire l par $l(\alpha x_0) = \alpha$.

a) $\forall x \in F, l(x) \leq p(x)$ car :

item si $\alpha \leq 0$, évident (car $p \geq 0$).

item si $\alpha > 0$ on a, $l(\alpha x_0) = \alpha = \alpha \cdot 1 \leq \alpha p(x_0) \stackrel{p \text{ sublin.}}{\stackrel{5.6}{\leq}} p(\alpha x_0)$

b) $\stackrel{1.3}{\xrightarrow{\text{Hahn-Banach}}} \exists L \in l(E, \mathbb{R})$ t.q. $L|_F = l$ et

(**) $L(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E$.

c) L est continue car :

$$x \in C \stackrel{(*)}{\stackrel{(**)}{\implies}} L(x) < 1$$

$\Rightarrow -L(x) = L(-x) \leq p(-x) < 1$ si $-x \in C$.

Ainsi, $|L(x)| < 1$ si $x \in C \cap (-C)$. En plus $C \cap (-C) \in \mathcal{U}(0_E)$, car \bullet_S est continue et C ouvert. Donc L est bornée sur un voisinage de $0_E \xrightarrow{5.1} L$ continue.

Soient $a \in A, b \in B$ alors $L a - L b + 1 = \underbrace{L(a - b + x_0)}_{\substack{L(x_0)=1 \\ \in C}} < 1 \implies L(a) < L(b) \implies$

$LA \cap LB = \emptyset$ et LA est à gauche de LB .

A ouvert, $L \neq 0 \xrightarrow{5.2} LA$ ouvert.

Posons $\gamma = \sup \{L a : a \in A\}$.

$$\implies L(a) < \gamma \leq L(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

- 2 - E evt. sur \mathbb{C} . Considérons $E_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel réel sous-jacent.

- 1er cas $\implies \exists L \in l(E_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ avec les propriétés voulues.

Considérons $\tilde{L}(x) = L(x) - i L(ix) \xrightarrow{1.1} \tilde{L} \in L(E, \mathbb{C})$ et $Re \tilde{L} = L$. En plus, \tilde{L} continue et $Re \tilde{L} a < \gamma \leq Re \tilde{L} b \quad \forall a \in A, b \in B.$ ○

Définition

Un evt. E est *localement convexe* si chaque point de E possède une base de voisinages d'ensembles convexes, ie $\forall x \in E, \forall U \in \mathcal{U}(x), \exists C$ convexe, $C \in \mathcal{U}(x)$, t.q. $x \in C \subseteq U$.

(Notons que C^0 est convexe, donc on pourrait choisir des convexes ouverts).

- Exemple

1) Chaque espace normé $(E, \| \cdot \|)$ est un espace vectoriel topologique localement convexe (evtlc)

2) contre - exemple : $L^p([0,1]), 0 < p < 1$; car C convexe ouvert non vide $\implies C = L^p$ (voir TD).

5.9 : 2ème théorème de séparation

E evtlc., $\emptyset \neq A, B \subseteq E, A \cap B = \emptyset, A, B$ convexes.

B fermé, A compact.

Alors $\exists L \in E^*, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ t.q. $Re L a < \gamma_1 < \gamma_2 < Re L b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$

En d'autres termes :

$$\sup_{a \in A} Re L a < \inf_{b \in B} Re L b.$$

Démonstration

1) Montrons d'abord $\exists V \in \mathcal{U}(0)$, convexe t.q. $(A + V) \cap B = \emptyset$

Soit $a \in A. A \cap B = \emptyset, B$ fermé $\implies \exists V_a \in \mathcal{U}(0)$, V_a convexe, ouvert, E loc. conv.

t.q. $(a + V_a + V_a) \cap B = \emptyset.$

$$\implies A \subseteq \bigcup_{a \in A} \underbrace{(a + V_a)}_{\text{ouvert}} \text{ ouvert.}$$

A compact $\implies A \subseteq \bigcup_{j=1}^N (a_j + V_{a_j}).$ Posons $V_j = V_{a_j} \quad V = V_1 \cap \dots \cap V_N$

$\Rightarrow V$ ouvert, convexe et $0 \in V$.

En plus, $A + V \subseteq \bigcup_{j=1}^N (a_j + V_j) + V \subseteq \bigcup_{j=1}^N (a_j + V_j + V_j)$. Comme chacun de ces ensembles est disjoint avec B , on obtient que $(V + A) \cap B = \emptyset$.

2) 1er cas : E réel

Posons $\tilde{A} = A + V$ $\tilde{B} = B$

\tilde{A} ouvert car $\tilde{A} = \bigcup_{a \in A} \underbrace{(a + V)}_{\text{ouvert}}$ et $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \emptyset$.

\tilde{A} convexe (A, V convexes +5.3), \tilde{B} convexe

$\xrightarrow{5.8} \exists L \in E^*$ t.q. $L(A + V)$ est à gauche de $L(B)$ et $L(A + V) \cap L(B) = \emptyset$.

$A + V$ ouvert $\xrightarrow{5.2} L(A + V)$ ouvert.

A compact, L continue $\Rightarrow L(A)$ compact et $L(A) \subseteq L(A + V)$. Ainsi $L(A)$ est strictement à gauche de $L(B)$.

Choisir $\gamma_1 = \frac{2}{3} \sup LA + \frac{1}{3} \inf LB$ et $\gamma_2 = \frac{1}{3} \sup LA + \frac{2}{3} \inf LB \Rightarrow$ assertion.

- 2ème cas : E complexe : comme d'habitude on passe à $E_{\mathbb{R}}$. ○

Corollaire 5.10

Soit E espace vectoriel top. loc. conv. Alors E^* séparante.

Démonstration

$x_1 \neq x_2 \in E$, $\{x_j\}$ convexe, compact, fermé (car T1).

Appliquer 5.9 à $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$ ○

Proposition 5.11

E evtlc., $F \subseteq E$ sev, $x_0 \in E$, $x_0 \notin \overline{F}$. Alors $\exists L \in E^*$ t.q. $L(x_0) = 1$ et $L(x) = 0 \quad \forall x \in F$.

Démonstration

Appliquer le 2ème théorème de séparation 5.9 à $A = \{x_0\}$ et $B = \overline{F}$ (sev. convexe).

Ainsi $\exists \tilde{L} \in E^*$ t.q. $Re \tilde{L}(x_0) < \gamma_1 < \gamma_2 < Re \tilde{L}(x) \quad \forall x \in F$.

$\xrightarrow{0_{E \subseteq F}} \tilde{L}(x_0) \neq 0$ et $\tilde{L}(x_0) \notin \tilde{L}(F) \subseteq \mathbb{K} \Rightarrow \tilde{L}(F)$ sev. propre de $\mathbb{K} \Rightarrow \tilde{L}(F) = \{0\}$

Posons $L = \frac{\tilde{L}}{\tilde{L}(x_0)} \Rightarrow L$ a les propriétés désirées. ○

Théorème 5.12 : théorème de Hahn-Banach pour les evtlc :

E evtlc., $F \subseteq E$ sev., l forme linéaire continue sur F . Alors $\exists L \in E^*$ t.q. $L|_F = l$.

Démonstration

S.p.g. $l \neq 0$. Posons $F_0 = \{x \in F : l(x) = 0\}$. Alors $F_0 \subset F$ (strict). Choisir

$x_0 \in F$ t.q. $l(x_0) = 1 \xrightarrow{l \text{ continue}} x_0 \notin \overline{F_0} = \overline{F_0} \cap F \Rightarrow x_0 \notin \overline{F_0}$

$\xrightarrow{5.11} \exists L \in E^*$ t.q. $L(x_0) = 1$ et $L|_{\overline{F_0}} \equiv 0$.

Soit $x \in F \Rightarrow x - l(x)x_0 \in F_0$ (car $l(x_0) = 1$) ainsi

$$L(x) - l(x) = L(x) - l(x) \underbrace{L(x_0)}_{=1} = L(\underbrace{x - l(x)x_0}_{\in F_0}) = 0$$

$$\Rightarrow L|_F = l$$

○

Rappel $X \neq \emptyset$, $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{K}^X = \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ appli.}\}$, X muni de la topologie initiale $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ associée à \mathcal{F} . Alors la famille des $\bigcap_{j=1}^n f_j^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ où $U \subseteq \mathbb{K}$ ouvert, $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$, forme une base de $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$. On en déduit que l'ensemble de tous les $U_{\varepsilon, f_1, \dots, f_n}(x_0) := \bigcap_{j=1}^n \{x \in X : |f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon\}$, où $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ est un système fondamental de voisinages pour $\mathcal{U}(x_0)$, $x_0 \in X$. Si X est un espace vectoriel et $\mathcal{F} \subseteq l(X)$, on a

$$U_{\varepsilon, f_1, \dots, f_n}(x_0) = x_0 + \bigcap_{j=1}^n \{x \in X : |f_j(x)| < \varepsilon\}.$$

Lemma 5.13

Soient E un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} et $\ell, \ell_1, \dots, \ell_n \in l(E, \mathbb{K})$. Supposons que $\bigcap_{j=1}^n \text{Ker} \ell_j \subseteq \text{Ker} \ell$ (*). Alors il existent $\alpha_j \in \mathbb{K}$ tq $\ell = \sum_{j=1}^n \alpha_j \ell_j$.

Démonstration

Soit $\Phi : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ définie par $\Phi(x) = (\ell_1(x), \dots, \ell_n(x))$. Alors, dû à (*), $\Phi(x) = \Phi(x')$ implique que $\ell(x) = \ell(x')$. Ainsi $f(\Phi(x)) = \ell(x)$ définit une application linéaire sur $\Phi(E)$. Celle-ci admet un prolongement linéaire F sur \mathbb{K}^n . C'est à dire il existe $\alpha_j \in \mathbb{K}$ tq $F(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$. Donc $\ell(x) = f(\Phi(x)) = F(\Phi(x)) = F(\ell_1(x), \dots, \ell_n(x)) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \ell_j(x)$.

Théorème 5.14

E espace vectoriel, $\mathcal{F} \subseteq l(E, \mathbb{K})$, \mathcal{F} sev. Supposons que \mathcal{F} soit séparante. Alors $(E, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ est un evtlc. L'ens. $E^* := (E, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})^*$ des formes linéaires continues sur E coïncide avec \mathcal{F} .

Démonstration

1) $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ est T2: En effet, soit $x, y \in E$, $x \neq y$. \mathcal{F} séparante $\Rightarrow \exists f \in \mathcal{F}$ tq. $f(x) \neq f(y)$.

$$\text{Soit } \varepsilon = |f(x) - f(y)| \Rightarrow \underbrace{B\left(f(x), \frac{\varepsilon}{3}\right)}_{B_1} \cap \underbrace{B\left(f(y), \frac{\varepsilon}{3}\right)}_{B_2} = \emptyset$$

$\Rightarrow f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = \emptyset$ et $x \in f^{-1}(B_1) =: U_1$, $y \in f^{-1}(B_2) =: U_2$. f continue $\Rightarrow U_1, U_2$ ouverts.

2) • Continuité de l'addition : $x_0, y_0 \in E$, $z_0 = x_0 + y_0$.

Montrons que $\forall W \in \mathcal{U}(z_0) \exists U \in \mathcal{U}(x_0)$ et $\exists V \in \mathcal{U}(y_0)$ tq. $U + V \subseteq W$.

Pour cela, soit $\widetilde{W} = \bigcap_{j=1}^N f_j^{-1}(B(0, \varepsilon)) := U_{\varepsilon, f_1, \dots, f_N}$, $f_j \in \mathcal{F}$, tq. $\widetilde{W} + z_0 \subseteq W$.

Posons $U = x_0 + U_{\frac{\varepsilon}{2}, f_1, \dots, f_N}$, $V = y_0 + U_{\frac{\varepsilon}{2}, f_1, \dots, f_N}$

$$\Rightarrow U + V \subseteq W$$

• Continuité de \cdot . Montrons que $\forall \alpha_0 \in \mathbb{K}, \forall x_0 \in E, \forall W \in \mathcal{U}(\alpha_0 x_0) \exists U \in \mathcal{U}(x_0)$
et

$\delta > 0$ t.q. $\forall x \in U, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ avec $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ on a $\alpha x \in W$.

Pour cela, écrivons $\alpha x = (\alpha - \alpha_0)(x - x_0) + (\alpha - \alpha_0)x_0 + \alpha_0(x - x_0) + \alpha_0 x_0$.

Choisir $\widetilde{W} \in \mathcal{U}(0)$, $\widetilde{W} = U_{\varepsilon, f_1, \dots, f_N}$, t.q. $\alpha_0 x_0 + \widetilde{W} \subseteq W$.

Soit $V_1 = U_{\frac{\varepsilon}{3}, f_1, \dots, f_N} \Rightarrow V_1 + V_1 + V_1 \subseteq \widetilde{W}$

Choisir $\delta > 0$ t.q. $|f_j((\alpha - \alpha_0)x_0)| = |\alpha - \alpha_0| |f_j(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\forall |\alpha - \alpha_0| < \delta, j = 1, \dots, N$.

Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ avec $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ on donc $(\alpha - \alpha_0)x_0 \in V_1$

Choisir $U = x_0 + U_{\frac{\varepsilon}{3(\delta + |\alpha_0|)}, f_1, \dots, f_N}$. Alors $U \subseteq x_0 + U_{\frac{\varepsilon}{3\delta}, f_1, \dots, f_N}$

Soit $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ et $x \in U$.

Alors $|f_j(x) - f_j(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3\delta}$ et

$$\begin{aligned} |f_j((\alpha - \alpha_0)(x - x_0))| &= |\alpha - \alpha_0| |f_j(x) - f_j(x_0)| \\ &< \delta \frac{\varepsilon}{3\delta} = \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } |f_j(\alpha_0(x - x_0))| = |\alpha_0| |f_j(x) - f_j(x_0)| \\ &< |\alpha_0| \frac{\varepsilon}{3|\alpha_0|} = \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha x \in V_1 + V_1 + V_1 + \alpha_0 x_0 \subseteq \widetilde{W} + \alpha_0 x_0 \subseteq W. \quad \circ$$

• Montrons que $E^* = \mathcal{F}$.

Comme chaque élément $f \in \mathcal{F}$ est linéaire et continue, on a $\mathcal{F} \subseteq (E, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})^*$ (déf. topologie initiale)

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ linéaire continue. Montrons que $f \in \mathcal{F}$.

Soit $U := \{x \in E : |f(x)| < 1\} \Rightarrow U$ ouvert, donc $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

Comme $0 \in U$ (f linéaire!) $\exists V \in \mathcal{U}(0), V = \bigcap_{j=1}^N \{x \in E : |f_j(x)| < \varepsilon\} = U_{\varepsilon, f_1, \dots, f_N}$ t.q. $V \subseteq U, f_i \in \mathcal{F}$.

f linéaire $\Rightarrow \delta V \subseteq \delta U = \{x : |f(x)| < \delta\}$.

Soit $K = \bigcap_{j=1}^N \text{Ker } f_j \Rightarrow K \subseteq \text{Ker } f$ car :

$x \in K \Rightarrow f_j(x) = 0 \Rightarrow x \in \delta V \subseteq \delta U = \{|f| < \delta\} \quad \forall \delta > 0, \delta \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) = 0$.

$$\xrightarrow[5.13]{\text{sev}} f = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j \quad (\alpha_j \in \mathbb{K}) \xrightarrow{\mathcal{F} \text{ sev}} f \in \mathcal{F}.$$

3) $(E, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ est localement convexe car les ensembles $U_{\varepsilon, f_1, \dots, f_n} = \bigcap_{j=1}^n \{x \in E : |f_j(x)| < \varepsilon\}$ du système fondamentale de voisinages de $U(0)$ sont des ensembles convexes, dû à la linéarité des f_j . \circ

Théorème 5.15 : 3ème théorème de séparation

(E, \mathcal{T}) evt., E^* séparante, $\emptyset \neq A, B \subseteq E$ convexes, $A \cap B = \emptyset$.

Supposons que A, B soient compacts. Alors $\exists L \in E^*$ t.q.

$$\sup_{a \in A} \text{Re } L a < \inf_{b \in B} \text{Re } L b.$$

Démonstration

Soit $\mathcal{F} = E^* \Rightarrow \mathcal{F}$ séparante et \mathcal{F} sev de $l(E, \mathbb{K})$

$\xrightarrow{5.14} (E, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ evtlc. et $(E, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})^* = \mathcal{F} = E^*$. Il est claire que $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{T}$.

5.9 \Rightarrow assertion (car A compact dans $\mathcal{T} \Rightarrow A$ compact dans $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$; B compact dans $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{T_2} B$ fermé dans $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$).

VI - LA STRUCTURE DES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES LOCALEMENT CONVEXES

$M \subseteq (E, \|\cdot\|)$ borné s'il \exists une boule $B = B(0, r)$ t.q. $M \subseteq B$. Notons aussi que $B = r B(0, 1)$

Définition

Soit (E, \mathcal{T}) evt.. $M \subseteq E$ est dit \mathcal{T} -borné si

$\forall U \in \mathcal{U}(0), \exists \lambda_0 > 0$ t.q. $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \lambda_0 \Rightarrow M \subseteq \lambda U$

Remarque

- On peut se restreindre à prendre des U d'un système fondamental de $\mathcal{U}(0)$.
- Si (E, \mathcal{T}) est un espace normé, alors les deux définitions coïncident.

Lemme 6.1

Soit (E, \mathcal{T}) un evt et V un voisinage convexe de 0, ou bien, soit E un evtlc et U un voisinage arbitraire de 0. Alors U et V contiennent un voisinage Ω de 0 qui est ouvert, convexe, équilibré et absorbant.

Démonstration

$0 \in U, E$ loc. convexe $\Rightarrow \exists$ ouvert convexe V t.q. $0 \in V \subseteq U$. Comme la multiplication scalaire est continue,

$\exists \delta > 0, \exists W$ ouvert, $0 \in W$ t.q. $\mu W \subseteq V \forall |\mu| \leq \delta$

- De plus, soit $\tilde{U} = \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha V$; alors \tilde{U} est convexe (claire) et équilibré car:

$$|\lambda| \leq 1, \lambda = |\lambda| e^{i\theta} \Rightarrow \lambda \tilde{U} = \bigcap_{|\alpha|=1} |\lambda| \alpha e^{i\theta} V = \bigcap_{|\beta|=1} |\lambda| \beta V \stackrel{(*)}{\subseteq} \bigcap_{|\beta|=1} \beta V = \tilde{U},$$

Notons que $(*)$ est vraie, car $x \in \beta V, 0 \in \beta V$ et βV convexe $\Rightarrow x|\lambda| + (1-|\lambda|)0 \in \beta V$

$$\Rightarrow |\lambda| \beta V \subseteq \beta V$$

- Soit $W_0 := \bigcup_{|\mu| \leq \delta} \mu W$. Alors $0 \in W_0$ et W_0 est équilibré, ouvert, $W_0 \subseteq V$ et $W_0 \subseteq \tilde{U}$

car : soit $x_0 \in W_0, |\alpha| = 1, W_0$ équilibré $\Rightarrow \bar{\alpha} x_0 \in W_0 \subseteq V$

$$\Rightarrow x_0 \in \alpha V \Rightarrow x_0 \in \tilde{U}.$$

- Donc $\tilde{U} \in \mathcal{U}(0)$. Soit $\Omega = \tilde{U}^0 \Rightarrow \Omega$ ouvert, $0 \in \Omega, \Omega$ convexe, équilibré et absorbant (5.4) ○

Théorème 6.2 : théorème de Kolmogorov

Soit (E, \mathcal{T}) evt. Alors E est normable si et seulement si \exists un voisinage convexe et \mathcal{T} -borné de 0_E .

Démonstration

" \Rightarrow " E normable $\Rightarrow B = \{x : \|x\| < 1\}$ convexe, ouvert, \mathcal{T} -borné.

" \Leftarrow "

• Soit V convexe \mathcal{T} -borné, $V \in \mathcal{U}(0_E)$, alors d'après 6.1, $\exists U \subseteq V$, $U \in \mathcal{U}(0_E)$, U ouvert, équilibré, convexe, absorbant et \mathcal{T} -borné (notons que V \mathcal{T} -borné, $U \subseteq V \Rightarrow U$ \mathcal{T} -borné).

• Soit p_U la jauge de Minkowski associée à U . Posons $\|x\| := p_U(x)$.

5.6 (3) $\Rightarrow p_U$ semi-norme.

Soit $x \neq 0$, E esp. $T_1 \Rightarrow \exists$ voisinage V de 0 t.q. $x \notin V$.

U \mathcal{T} -borné, $\exists t_0 > 0$, $\forall t \geq t_0 : U \subseteq tV \Rightarrow \frac{1}{t}U \subseteq V$

$$\Rightarrow x \notin \frac{1}{t}U \Rightarrow p_U(x) \geq \frac{1}{t_0} > 0 \Rightarrow p_U \text{ norme.}$$

• U ouvert $\xrightarrow{5.6(4),(7)} \{x : p_U(x) < 1\} = U$

$$\xrightarrow{\forall r \geq 0} \{x : p_U(x) < r\} = rU.$$

Notons que $\{rU : r > 0\}$ est un système fondamental de $\mathcal{U}(0_E)$ pour la topologie \mathcal{T} car :

soit $W \in \mathcal{T}$, $0_E \in W \Rightarrow \exists r > 0$ t.q. $rU \subseteq W$ car U borné.

Comme un système fondamental de $\mathcal{U}(0_E)$ associé à la topologie induite par la norme est l'ensemble des boules $\{x : \|x\| < r\} = \{x : p_U(x) < r\}$ et que les systèmes fondamentaux de voisinages déterminent de façon unique une topologie, on a que \mathcal{T} coïncide avec la topologie induite par $\|\cdot\|$ sur E \circ

Définitions 1) Soit \mathcal{P} une famille de semi-normes sur un espace vectoriel E . On dit que \mathcal{P} est faiblement séparante, si $\forall x \in E, x \neq 0_E, \exists p \in \mathcal{P}$ t.q. $p(x) \neq 0$.

2) Soit \mathcal{P} une famille de semi-normes sur un espace vectoriel E . Soit $U_{\varepsilon, p_1, \dots, p_n} = \bigcap_{j=1}^n \{x \in E : p_j(x) < \varepsilon\}$. Alors la famille des ensembles

$$x_0 + U_{\varepsilon, p_1, \dots, p_n}, (\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}, p_j \in \mathcal{P}, x_0 \in E)$$

est une base de d'une topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ sur E , dite "topologie invariante par translation engendrée par \mathcal{P} ".

Notons que si U parcourt un système fondamental de voisinages de 0_E , alors $x_0 + U$ parcourt un système fondamental de voisinages de x_0 .

En plus, $x_0 + U_{\varepsilon, p_1, \dots, p_n} = \bigcap_{j=1}^n \{x \in E : p_j(x - x_0) < \varepsilon\}$

Exemple: Soit E esp. vect., $\mathcal{F} \subseteq l(E, \mathbb{K})$ et $\mathcal{P} = \{|f| : f \in \mathcal{F}\}$. Alors $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$. (Voir 5.14).

Proposition 6.3

Soit \mathcal{P} une famille de semi-normes sur un espace vectoriel E . Supposons que \mathcal{P} soit faiblement séparante. Soit $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ la topologie invariante par translation (i.t.) engendrée par \mathcal{P} . Alors

- 1) $(E, \mathcal{O}_{\mathcal{P}})$ est un evtlc.
- 2) Chaque $p \in \mathcal{P}$ est continue.
- 3) $M \subseteq E$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ -borné $\iff \forall p \in \mathcal{P}, p$ est bornée sur M
(ie $\sup_{x \in M} p(x) < \infty$).

Démonstration

1) voir 5.14. Notons que $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ est T1. En effet, soit $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$. \mathcal{P} faiblement séparante $\implies \exists p \in \mathcal{P} : p(x_0) \neq 0 \implies 0_E \notin \{x \in E : p(x - x_0) < \frac{1}{2}p(x_0)\} =: V(x_0)$. Notons que $V(x_0) \in \mathcal{U}(x_0)$ et que V est ouvert. Donc $0_E \notin \bigcup_{x_0 \neq 0_E} V(x_0) = E \setminus \{0_E\}$. Ainsi $\{0_E\}$ est un fermé.

2) clair (par déf. de la topologie invariante par translation)

3) " \implies " M borné, $p \in \mathcal{P} \implies B = \{x : p(x) < 1\}$ ouvert; $B \in \mathcal{U}(0_E) \xrightarrow{\text{déf. borné}} \exists \alpha > 0$
 $M \subseteq \alpha B$. \xrightarrow{p} $\forall x \in M, p(x) < \alpha$.

" \impliedby " Supposons que chaque $p \in \mathcal{P}$ soit bornée sur M .

Soit $U \in \mathcal{U}(0_E)$. Choisir $U_{\varepsilon, p_1, \dots, p_m} := \bigcap_{j=1}^m \{x : p_j(x) < \varepsilon\} \subseteq U$

$\xrightarrow{\text{hyp.}} p_j < C_j$ sur $M, j = 1, \dots, m$

Soit $\alpha = \max_j C_j \frac{1}{\varepsilon} \implies M \subseteq \alpha U$ (car si $x \in M \implies p_j(x) < C_j \leq \alpha \varepsilon$) ○

Théorème 6.4

Soit (E, \mathcal{T}) evtlc. Alors il existe une famille faiblement séparante \mathcal{P} de semi-normes continues sur E t.q. la topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ invariante par translation engendrée par \mathcal{P} coïncide avec \mathcal{T} .

En d'autres mots, chaque evtlc est déterminé par une famille de semi-normes.

Démonstration

Soit $\mathcal{P} = \{p_U : U \text{ convexe, ouvert, équilibré, } 0_E \in U\}$, où p_U est la jauge de Minkovski associée à U . Alors

1) $\mathcal{P} \neq \emptyset$ (E loc. convexe + 6.1)

2) $p \in \mathcal{P} \xrightarrow{5.6(3)} p$ semi-norme

3) \mathcal{P} faiblement séparante : en effet, soit $x \in E, x \neq 0_E$ esp. $T_1 \xrightarrow{6.1} \exists V \in \mathcal{U}(0_E), V$ convexe, équilibré, ouvert t.q. $x \notin V$.

Comme $V \xrightarrow{5.6(4)} \{x : p_V(x) < 1\}$ on a $p_V(x) \geq 1$. De plus, $p_V \in \mathcal{P}$.

4) $p_U \in \mathcal{P} \xrightarrow{5.7} p_U$ continue.

5) $\mathcal{O}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{T}$, claire car p_U continue $\implies \{p_U < \varepsilon\} \in \mathcal{T}$.

6) Soit $U \in \mathcal{T}, U \in \mathcal{U}(0_E) \xrightarrow{6.1} \exists$ ouvert, convexe, équilibré V t.q. $0_E \in V \subseteq U$.

$\xrightarrow{5.6} V = \{x : p_V(x) < 1\}$ et p_V continue (dans $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ et \mathcal{T}).

$\implies V$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ ouvert.

donc chaque voisinage U de 0_E dans \mathcal{T} est un voisinage de 0_E dans $\mathcal{O}_{\mathcal{P}} \implies \mathcal{T} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$.

$\implies \mathcal{T} = \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$

○

Théorème 6.5 (Théorème de métrisation d'evtlc.)

Soit (E, \mathcal{T}) evtlc. et \mathcal{P} une famille (faiblement séparante) de semi-normes qui induit la topologie \mathcal{T} , i.e. $\mathcal{T} = \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) \mathcal{T} peut être définie par une famille faiblement séparante dénombrable de semi-normes.
- 2) \exists une distance invariante par translation qui induit la topologie \mathcal{T} ($d(x, z) = d(x + y, z + y) \quad \forall x, y, z$)
- 3) E métrisable
- 4) L'espace E est un espace à base dénombrable de voisinages.

Démonstration

(1) \implies (2) : (E, \mathcal{T}) evtlc., $\mathcal{D} = \{p_j : j = 1, 2, \dots\}$ engendre la topologie \mathcal{T} , i.e. $\mathcal{T} = \mathcal{O}_{\mathcal{D}}$ et $\{x_0 + U_{\varepsilon, p_1, \dots, p_n}, \varepsilon > 0, p_j \in \mathcal{D}, n \in \mathbb{N}\}$ est une base de voisinages de x_0 . Notons que tous les $p_j \in \mathcal{D}$ sont continues (voir 6.3).

Posons $d(x, y) = \max_j \frac{c_j p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)} \quad j = 1, 2, \dots$ où $c_j > 0, c_j \rightarrow 0$

• \mathcal{D} faiblement séparante $\implies d$ distance ($\frac{\delta}{1+\delta}$ monotone), d invariante par translation.

• Soit $B_r := \{x : d(0, x) < r\}$. Montrons que $\{B_r, r > 0\}$ est un système fondamental de voisinages convexes et équilibrés de 0_E (pour la topologie \mathcal{T}).

En effet, fixons $r > 0$. Si $c_i \leq r$ (d'ailleurs vrai pour presque tous les $i \in \mathbb{N}$), alors $\frac{c_i p_i}{1+p_i} \leq r$; donc $B_r = \bigcap_{i: c_i > r} \left\{x : p_i(x) < \frac{r}{c_i - r}\right\}$ est une intersection finie d'ouverts de \mathcal{T} .

$\implies B_r \in \mathcal{T}$

• Soit $V_i = \left\{x : p_i(x) < \frac{r}{c_i - r}\right\} \implies V_i$ convexe (car p_i semi-norme) $\implies B_r$ convexe.

• $0_E \in B_r$.

• Soit $W \in \mathcal{U}_{\mathcal{T}}(0_E) \implies \exists p_1, \dots, p_n \in \mathcal{D}$ t.q. $\bigcap_{i=1}^n \{x : p_i(x) < \delta_i\} \subseteq W$ ($\delta_i < 1$).

Soit $2r < \min\{c_1 \delta_1, \dots, c_n \delta_n\}$ et $x \in B_r$. Alors $\frac{c_i p_i(x)}{1+p_i(x)} < r < \frac{c_i \delta_i}{2}, \quad i = 1, \dots, n$

$\xrightarrow{\delta_i < 1} p_i(x) < \delta_i \implies B_r \subseteq W$.

• B_r équilibré, car p_i semi-norme.

conclusion : $\{B(0, r), r > 0\}$ base de voisinages de $\mathcal{U}_d(0_E)$ et de $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}(0_E) \implies$ topologie induite par d coïncide avec $\mathcal{T} = \mathcal{O}_{\mathcal{D}}$. (Notons l'invariance par translation: $d(x+y, x+z) = d(y, z)$).

(2) \implies (3) : claire

(3) \implies (4) : $\{B(x_0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}_d(x_0)$.

(4) \implies (1) : Soit $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ un système fondamental dénombrable de $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}(0)$.

Notons que $\mathcal{T} = \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon > 0, \exists p_1^{(n)}, \dots, p_m^{(n)} \in \mathcal{P}$ t.q. $\bigcap_{j=1}^{m_n} \{p_j^{(n)}(x) < \varepsilon\} \subseteq V_n \quad (*)$.

Soit $\mathcal{P}_n = \{p_1^{(n)}, \dots, p_{m_n}^{(n)}\} \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{S} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$.

Notons que \mathcal{S} est faiblement séparante. En effet, soit $x_0 \neq 0_E \implies \exists n : x_0 \notin V_n \xrightarrow{(*)} p_{j(n)}^{(n)}(x_0) \geq \varepsilon$.

Montrons que la topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ i.t. engendrée par \mathcal{S} coïncide avec \mathcal{T} . Comme $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$ on a $\mathcal{O}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$. (exo.).

Soit $U_{\varepsilon, p_1, \dots, p_m} \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ et $0_E \in U_{\varepsilon, p_1, \dots, p_m}$.

Comme $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ est un système fondamental de $\mathcal{U}(0_E)$ pour $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$, on trouve un $n \in \mathbb{N}$ t.q. $V_n \subseteq U_{\varepsilon, p_1, \dots, p_m}$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(*)} \exists q_j \in \mathcal{S} \text{ t.q. } \bigcap_{j=1}^N \{q_j(x) < \varepsilon\} \subseteq V_n \\ \implies \mathcal{O}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{S}}. \end{aligned}$$

Conclusion: $\mathcal{T} = \mathcal{O}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ ○

- **Remarque** • On peut remplacer dans (1) \implies (2) la distance d par

$$d'(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x-y)}{1 + p_j(x-y)}$$

• Si E est un espace topologique arbitraire, alors, en général, (4) $\not\Leftarrow$ (3).

Définition

Un evt. E est dit *espace de Fréchet* si E est loc. convexe et métrisable par une distance complète.

- Exemple

• chaque espace de Banach est un espace de Fréchet.

• $(C^\infty([0, 1]), \mathcal{P})$, $\mathcal{P} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ où $p_n(f) = \max_{x \in [0, 1]} |f^{(n)}(x)|$

($n = 0, 1, \dots$) est une semi-norme. Notons que \mathcal{P} est faiblement séparante et que d' est une distance complète.

$\mathcal{B} := \{f_0 + \bigcap_{j=1}^n \{|p_j(f)| < \varepsilon\} : n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0\}$ base de voisinage de $\mathcal{U}(f_0)$; $f_0 \in C^\infty([0, 1])$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \left\{ f \in C^\infty([0, 1]) : \max_{x \in [0, 1]} |f^{(j)}(x) - f_0^{(j)}(x)| < \varepsilon \right\}, j = 0, \dots, n, n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0 \right\}$$

$(C^\infty([0, 1]), \mathcal{P})$ est un espace de Fréchet qui n'est pas normable (exo).

Autre exemple: L'espace des fonctions entières muni de la topologie de la convergence compacte: $f_n \xrightarrow{\text{compact}} f \iff \forall K \subseteq \mathbb{C}, K \text{ compact}, \max_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$ (exo).

VII - TOPOLOGIE FAIBLE ET FAIBLE-*

A - TOPOLOGIE FAIBLE

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Alors la *topologie faible* $\sigma := \sigma(E, E^*)$ est la topologie la plus grossière sur E t.q. tous les éléments de E^* soient continus (c'est la topologie initiale sur E associée à E^*).

Remarque

- 1) $\xrightarrow{5.14} (E, \sigma(E, E^*))$ evtlc. et $(E, \sigma)^* = E^*$.
- 2) $\sigma \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ où $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ est la topologie induite par $\|\cdot\|$ sur E
- 3) Système fondamental de $\mathcal{U}(x_0)$ ($x_0 \in E, f_j \in E^*, \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$) :

$$\begin{aligned} x_0 + U_{\varepsilon, f_1, \dots, f_n} &= \{x : |f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon, j = 1, \dots, n\} \\ &= x_0 + \bigcap_{j=1}^n \{x : |f_j(x)| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

- 4) $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x (not.: $x_n \xrightarrow{\sigma} x$)
 $\iff f(x_n) \rightarrow f(x) \forall f \in E^*$.

Proposition 7.1

Soit $(E, \|\cdot\|)$ espace normé.

- 1) si $\dim E = \infty$, alors chaque voisinage \tilde{V} faible de 0_E —i.e. $\tilde{V} \in \mathcal{U}_\sigma(0)$ — contient un sev. de dimension infinie.
- 2) $\sigma = \mathcal{T}_{\|\cdot\|} \iff \dim E < \infty$

Démonstration

1) - $\dim E = \infty$. Soit $V = U_{\varepsilon, f_1, \dots, f_n} \subseteq \tilde{V}$, $f_j \in E^*, f_j \not\equiv 0$. Considérons $N = \bigcap_{j=1}^n \text{Ker } f_j \implies N \subseteq V \subseteq \tilde{V}$.

Soit $T : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ définie par $T(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Alors T est linéaire et $\text{Ker } T = N$.

Le théorème des isomorphismes implique que E/N est isomorphe à $T(E) \subseteq \mathbb{K}^n$. Donc $\text{codim } N = \dim T(E) \leq n < \infty$. Comme $\dim E = \infty$, on obtient $\dim N = \infty$.

2) Soit $r \in]0, +\infty[$. Comme chaque boule $B(0, r)$ contenant un sev. coïncide avec E , on voit avec 1) que $\sigma \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ si $\dim E = \infty$.

Soit $\dim E = n$ et $\{x_1, \dots, x_n\}$ base algébrique de E . Ainsi $x \in E \implies x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$ ($\alpha_j \in \mathbb{K}$).

Soit $f_j(x) = \alpha_j$ ($j = 1, \dots, n$). Notons que les coefficients α_j sont déterminés de façon unique. Ainsi f_j est bien défini et $f_j \in E^*$.

Soit $U = \bigcap_{j=1}^n \{x \in E : |f_j(x)| < 1\} \implies U \in \sigma$ et $U = \bigcap_{j=1}^n \{x \in E : |\alpha_j| < 1\}$. Donc U est la boule unité pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, donnée par $\|x\|_\infty = \max_j |\alpha_j|$.

Comme $\|\cdot\|$ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$, il existe $\delta > 0$ tq $\delta U \subseteq B_{\|\cdot\|}(0, 1)$

$\implies \mathcal{T}_{\|\cdot\|} \subseteq \sigma$. Par définition, $\sigma \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. Donc $\mathcal{T}_{\|\cdot\|} = \sigma$. ○

Remarque Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé de dimension infinie. Alors d'après 7.1(1), l'intérieur faible de la boule unité $B(0, 1)$ est \emptyset .

Proposition 7.2

$(E, \|\cdot\|)$ espace-normé, $C \subseteq E$ convexe. Alors $\overline{C}^w = \overline{C}$, où \overline{C}^w est l'adhérence faible de C .

Démonstration

Soit $\sigma = \sigma(E, E^*)$ la topologie faible sur E . \overline{C}^w σ -fermé $\Rightarrow E \setminus \overline{C}^w$ σ -ouvert

$\Rightarrow E \setminus \overline{C}^w$ $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ -ouvert $\Rightarrow \overline{C}^w$ -fermé pour $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. Ainsi $\overline{C} \subseteq \overline{C}^w$
(notons que \overline{C} est le plus petit fermé qui contient C)

Soit $x_0 \in E \setminus \overline{C}$. Mq $x_0 \notin \overline{C}^w$. Utilisons le 2ème théorème de séparation pour l'evtlc $(E, \|\cdot\|)$, $A = \{x_0\}$, $B = \overline{C}$. Notons que C convexe $\xrightarrow{5.3} \overline{C}$ convexe.

$\xrightarrow{5.9} \exists f \in E^* = (E, \sigma)^*$, $\exists \gamma \in \mathbb{R} : \forall x \in \overline{C}$

$$Re f(x_0) < \gamma < Re f(x)$$

Soit $U = \{x \in E : Re f(x) < \gamma\} \Rightarrow U$ σ -ouvert car $f \in (E, \sigma)^*$.

Comme $x_0 \in U$ et que $U \cap C = \emptyset$, on a $x_0 \notin \overline{C}^w$. Ainsi $\overline{C}^w \subseteq \overline{C}$.

Conclusion: $\overline{C} = \overline{C}^w$. ○

Corollaire 7.3

E espace normé $((E, \|\cdot\|))$, $C \subseteq E$ convexe. Sont équivalentes :

- 1) C $\|\cdot\|$ -fermé
- 2) C σ -fermé.

Démonstration clair

Remarque En particulier, la boule $\overline{B}(0, 1) = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$ est faiblement fermée.

Théorème 7.4 (Mazur)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ espace normé et $x_n \xrightarrow{w} x$ (convergence faible). Alors il existe des combinaisons convexes y_k de x_n i.e.

$$y_k = \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^{(k)} x_j, \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^{(k)} = 1, \alpha_j^{(k)} \geq 0 \quad \text{t.q.} \quad y_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x.$$

Démonstration

Soit H l'enveloppe convexe de $\{x_1, x_2, \dots\}$. Hyp.: $x \in \overline{H}^w \stackrel{7.2}{=} \overline{H} \Rightarrow \exists (y_k) \in$

$H^{\mathbb{N}}$ t.q. $y_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

Lemme 7.5

Soit E espace vectoriel, $\mathcal{F} \subseteq l(E, \mathbb{K})$, \mathcal{F} sev séparant, et $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ la topologie initiale sur E induite par \mathcal{F} .

Alors $(E, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ est métrisable $\Leftrightarrow \dim \mathcal{F}$ est au plus dénombrable

Démonstration

" \Leftarrow " $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ base algébrique de \mathcal{F} ; $u \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists \alpha_j \in \mathbb{K}$ t.q. $u = \sum_{j=0}^n \alpha_j u_j$.

Les α_j sont déterminés de façon unique. Soit $p_n(x) := |u_n(x)|$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in E \Rightarrow p_n$

semi-norme sur E . \mathcal{F} séparante $\implies \mathcal{S} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ faiblement séparante. \mathcal{S} engendre la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ car:

- $x_0 + \bigcap_{j=1}^n \{|p_j| < \varepsilon\}$ élément d'un système fondamental de $\mathcal{U}(x_0)$ pour la topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$.
- $\mathcal{O}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ car chaque p_j est $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ -continue, donc $\{|p_j| < \varepsilon\}$ $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ -ouvert.
- $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$, car : $u \in \mathcal{F} \implies u(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j u_j(x)$

$$\implies |u(x)| \leq \overbrace{\sum_{j=0}^n |\alpha_j|}^{:=c} \max_{1 \leq j \leq n} |u_j(x)| = c \max_{1 \leq j \leq n} p_j(x)$$

$$\implies \bigcap_{j=1}^n \{|p_j| < \varepsilon/c\} \subseteq \{|u| < \varepsilon\} \implies \{|u| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}(0) \implies \mathcal{U}_{\mathcal{T}_{\mathcal{F}}}(0) \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}(0).$$

Comme $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ sont invariantes par translation, et que les systèmes de voisinages déterminent de façon unique une topologie, on a $\mathcal{O}_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

Donc $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ est engendrée par une famille dénombrable de semi-normes $\xrightarrow{6.5} \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ métrisable.

" \implies " Soit $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ métrisable. Notons que d'après 5.14, $(E, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ est un evtlc et que $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\{|u|:u \in \mathcal{F}\}}$.

6.5 $\implies \exists$ famille \mathcal{D} dénombrable et faiblement séparante de semi-normes continues t.q. $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{D} \subseteq \{|u| : u \in \mathcal{F}\}$. Donc $\mathcal{D} = \{|u_n| : n \in \mathbb{N}\}$ ($u_n \in \mathcal{F}$).

Montrons que $\text{Vect}\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{F}$. Pour cela, soit $u \in \mathcal{F}$.

Comme $\{|u| < \varepsilon\}$ est $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ -ouvert $\xrightarrow{\text{déf. } \mathcal{O}_{\mathcal{D}}} \exists u_j$ ($j = 1, \dots, n$), $|u_j| \in \mathcal{D}$ t.q. $\bigcap_{j=1}^n \{|u_j| < \varepsilon_j\} \subseteq \{|u| < \varepsilon\}$. Notons que $n = n(\varepsilon)$, $\varepsilon_j = \varepsilon_j(\varepsilon)$.

Soit $u_j(x) = 0 \forall j \in \{1, \dots, n\} \implies |u_j(x)| < \varepsilon_j \implies |u(x)| < \varepsilon$. De plus, en remplaçant x par αx , on a $\forall \alpha$:

$$|\alpha| |u(x)| < \varepsilon \implies u(x) = 0 \implies \text{Ker } u \supseteq \bigcap_1^n \text{Ker } u_j$$

$$\stackrel{5.13}{\implies} u \in \text{Vect}\{u_1, \dots, u_n\}$$

Il existe un sous-système libre maximal de $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. Celui-ci est une base algébrique de \mathcal{F} . \circ

Proposition 7.6

$(E, \|\cdot\|)$ espace normé, $\sigma = \sigma(E, E^*)$ topologie faible. Alors (E, σ) métrisable $\iff \dim E < +\infty$

Démonstration

" \Leftarrow " $\dim E < \infty \xrightarrow{7.1} \sigma = \mathcal{T}_{\|\cdot\|} \implies (E, \sigma)$ métrisable.

" \Rightarrow " σ métrisable $\xleftrightarrow{7.5} \dim E^*$ au plus dénombrable (notons que $\mathcal{F} := E^* \subseteq l(E, \mathbb{K})$ est séparante : cf. théorème de Hahn-Banach, corollaire 1.9).

E^* est un espace de Banach; donc espace métrique complet. Supposons que $\{x_1^*, x_2^*, \dots\}$ soit une base algébrique dénombrable (fini ou non) de E^* . Soit $F_n = \text{Vect}\{x_1^*, \dots, x_n^*\} \implies E^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. En plus, $\dim F_n = n < +\infty$; donc F_n

complet $\implies F_n$ fermé dans E^*

$$\xrightarrow{\text{Baire}} \exists n_0 : (F_{n_0})^0 \neq \emptyset.$$

Ainsi on a trouvé un sev. V de E^* de dimension finie t.q. $V^0 \neq \emptyset \implies V = E^*$ et $\dim E^* < \infty \xrightarrow{\text{H.B.}} \dim E < +\infty.$ \circ

B - Topologie faible-*

E espace normé, E^* espace de Banach, $E^{**} := (E^*)^*$ l'espace normé des formes linéaires continues sur E^* . Immergeant E dans E^{**} :

Soit $x \in E$, considérons

$$\Phi_x : \begin{cases} E^* \rightarrow \mathbb{K} \\ x^* \mapsto \Phi_x(x^*) := x^*(x) = \langle x, x^* \rangle. \end{cases}$$

$\implies \Phi_x$ linéaire et continue car:

$$|\Phi_x(x^*)| = |x^*(x)| \leq \|x^*\| \|x\| \quad \forall x^* \in E^* \implies \|\Phi_x\| \leq \|x\|.$$

On a même $\|\Phi_x\| = \|x\|$. En effet, $\|\Phi_x\| = \sup_{\|x^*\|=1} |\Phi_x(x^*)| =$

$$= \sup_{\|x^*\|=1} |x^*(x)| \stackrel{9.9}{\leq} \|x\|$$

(Hahn-Banach $\implies \exists x^* \in E^*$ t.q. $x^*(x) = \|x\|$, $\|x^*\| = 1$ si $x \neq 0$.)

Soit $J_E : \{E \rightarrow E^{**} x \mapsto \Phi_x \implies J_E$ injective et linéaire car:

$$\begin{aligned} \Phi_x = 0 &\implies \Phi_x(x') = 0 \quad \forall x' \in E^* \\ &\implies x'(x) = 0 \quad \forall x' \in E^* \stackrel{9.9}{\implies} x = 0 (E^* \text{ séparante}) \\ &\implies \text{Ker } J_E = \{0\}. \end{aligned}$$

$\|J_E(x)\| = \|\Phi_x\| = \|x\| \implies J_E$ isométrie.

conclusion : J_E est un homomorphisme isométrique; donc E peut être considéré comme un sous-espace normé de E^{**} , (procédé d'immersion de E dans son bidual topologique).

Remarque

1) en général, $J_E(E)$ n'est pas fermé dans E^{**} ; mais si E est un espace de Banach, alors $J_E(E)$ est complet (car J_E isométrie), donc fermé dans E^{**} .

2) J_E n'est pas surjective en général.

3) On a $\langle x^*, J_E x \rangle = \langle x, x^* \rangle \quad \forall x \in E, x^* \in E^*$ et $\Phi_x = J_E x$.

Définition

On dit qu'un espace normé est *réflexif* si J_E est surjective.

Notons que ceci implique que E est complet.

Définition E espace normé, E^* son dual topologique. La topologie la plus grossière sur E^* t.q. toutes les formes linéaires $\Phi_x (x \in E)$ soient continues est appelée la *topologie faible-** (sur E^*). Notation : $\sigma^* := \sigma(E^*, E)$.

Remarque

1) σ^* est donc la topologie initiale sur E^* induite par la famille $\{\Phi_x : x \in E\} := \mathcal{F}$. Notons que $\mathcal{F} = J_E(E) \subseteq E^{**}$ est un sev. de E^{**} .

2) 5.14 $\Rightarrow (E^*, \sigma^*)$ evtlc:

(car \mathcal{F} séparante : $x' \neq y' \in E^*$, supposons que $\forall x \in E : \Phi_x(x') = \Phi_x(y') \Rightarrow x'(x) = y'(x) \quad \forall x \in E$

$$\Rightarrow x' = y'$$

3) De plus, $(E^*, \sigma^*)^* = \mathcal{F} = J_E(E)$.

4) éléments d'une base topologique de σ^* :

$$\begin{aligned} U_{\varepsilon, x_1, \dots, x_n}(x_0^*) &= x_0^* + \bigcap_{j=1}^n \{x^* \in E^* : |\Phi_{x_j}(x^*)| < \varepsilon\} = \\ &= x_0^* + \bigcap_{j=1}^n \{x^* \in E^* : |\langle x_j, x^* \rangle| < \varepsilon\} = \\ &= \bigcap_{j=1}^n \{x^* \in E^* : |(x^* - x_0^*)(x_j)| < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

6) on a ces trois topologies loc. convexes sur E^* :

$$\underbrace{\sigma(E^*, E)}_{\text{topo. faible-}^* \text{ sur } E^*} \subseteq \underbrace{\sigma(E^*, E^{**})}_{\text{topo. faible sur } E^*} \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|_{E^*}}.$$

- **Rappel Lemme/théorème de Riesz**

Soit E un espace normé. Alors la boule unité $\{\|x\| \leq 1\}$ est compacte $\iff \dim E < +\infty$ Voir cours DEUG 2 ou licence).

Lemme 7.7

$B^* = \{x' \in E^* : \|x'\|_{E^*} \leq 1\}$ est σ^* -fermée dans E^* .

Démonstration

Montrons que $E^* \setminus B^*$ est σ^* -ouvert. Soit $\|x'\| > 1$, disons $\|x'\| = 1 + \delta$, $\delta > 0$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in E, \|x_0\| = 1 \quad \text{t.q.} \quad |x'(x_0)| > 1 + \frac{\delta}{2}$$

$$U := U_{\frac{\delta}{4}, x_0} = \left\{ x^* \in E^* : |x^*(x_0)| < \frac{\delta}{4} \right\} \Rightarrow U \in \sigma^*$$

On a $x' + U \subseteq E^* \setminus B^*$!! En effet, soit $z' \in x' + U \Rightarrow \exists y' \in U$ t.q. $z' = x' + y'$

$$\Rightarrow \|z'\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} |z'(x)| \geq |z'(x_0)| \geq |x'(x_0)| - |y'(x_0)| \geq$$

$$\geq 1 + \delta/2 - \delta/4 = 1 + \delta/4 > 1.$$

○

Théorème 7.8 : théorème d'Alaoglu-Bourbaki

E espace normé; alors la boule unité $B^* = \{x' \in E^* : \|x'\| \leq 1\}$ est σ^* -compacte.

Démonstration

Construisons un espace topologique (X, \mathcal{T}) compact, T_2 , tel que

(1) $B^* \subseteq X$, B^* \mathcal{T} -fermé (donc \mathcal{T} -compact) et

(2) $\mathcal{T}|_{B^*} = \sigma^*|_{B^*}$

(dans ce cas B^* sera σ^* -compact).

Soit $x' \in B^* \Rightarrow |x'(x)| \leq \underbrace{\|x'\|}_{\leq 1} \|x\| \leq \|x\| \quad \forall x \in E$

Soit $\mathcal{D}_x = \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha| \leq \|x\|\} \Rightarrow \mathcal{D}_x$ compact dans \mathbb{K} .

Soit $X := \prod_{x \in E} \mathcal{D}_x = \{g : E \rightarrow \mathbb{K} \text{ t.q. } \forall x \in E : |g(x)| \leq \|x\|\}$

$\Rightarrow B^* \subseteq X$

$\xRightarrow{\text{Tychonov}} (X, \mathcal{T})$ compact, où \mathcal{T} est la topologie du produit.

• (X, \mathcal{T}) esp. T_2 , car \mathcal{D}_x esp. T_2 pour tout x .

• Démonstration de (2)

• $f \in B^*$, $\varepsilon > 0$, $x_1, \dots, x_n \in E$,

$U_{\varepsilon, x_1, \dots, x_n}(f) = \bigcap_{j=1}^n \{x' \in E^* : |x'(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon\}$

élément de base pour σ^* .

$V_{\varepsilon, x_1, \dots, x_n}(f) = \bigcap_{j=1}^n \{g \in X : |g(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon\}$

élément de base pour \mathcal{T} .

On obtient:

$V_{\varepsilon, x_1, \dots, x_n}(f) \cap B^* \stackrel{!}{=} U_{\varepsilon, x_1, \dots, x_n}(f) \cap B^*$.

• Montrons que B^* est \mathcal{T} -fermée.

Soit $f \in \overline{B^*}^{\mathcal{T}} \subseteq X$. Montrons que $f \in B^*$.

(i) f est linéaire : $x_1, x_2 \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x_3 := \alpha x_1 + \beta x_2$. Montrons que $f(x_3) - \alpha f(x_1) - \beta f(x_2) = 0$ (*)

En effet soit $\varepsilon > 0$, $V_{\varepsilon, x_1, x_2, x_3}(f) \in \mathcal{T}$, $f \in \overline{B^*}^{\mathcal{T}}$

$\Rightarrow \exists f_\varepsilon \in V_{\varepsilon, x_1, x_2, x_3}(f) \cap B^* \neq \emptyset$

$\Rightarrow |f(x_3) - \alpha f(x_1) - \beta f(x_2)| \underset{f_\varepsilon \text{ lin}}{=} |f_\varepsilon(x_3) - \alpha f_\varepsilon(x_1) - \beta f_\varepsilon(x_2)|$

$= |f(x_3) - f_\varepsilon(x_3) - \alpha(f(x_1) - f_\varepsilon(x_1)) - \beta(f(x_2) - f_\varepsilon(x_2))|$

$\leq |f(x_3) - f_\varepsilon(x_3)| + |\alpha| |f(x_1) - f_\varepsilon(x_1)| + |\beta| |f(x_2) - f_\varepsilon(x_2)|$

$\leq \varepsilon + |\alpha| \varepsilon + |\beta| \varepsilon = \varepsilon(1 + |\alpha| + |\beta|)$

$\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow (*)$.

(ii) $\|f\| \leq 1$. En effet, soit $x \in E$, $\|x\| \leq 1$. Montrons que $|f(x)| \leq 1$. Pour cela, soit

$\varepsilon > 0 \Rightarrow V_{\varepsilon, x}(f) \in \mathcal{T}$, $f \in \overline{B^*}^{\mathcal{T}} \Rightarrow V_{\varepsilon, x}(f) \cap B^* \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists f_\varepsilon \in V_{\varepsilon, x}(f) \cap B^* \implies |f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Comme $\|f_\varepsilon\| \leq 1$ on a :

$$|f(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f_\varepsilon(x)|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|f_\varepsilon(x)|}_{\leq \|f_\varepsilon\| \leq 1} \leq \varepsilon + 1$$

$\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow |f(x)| \leq 1.$ ○

Lemme 7.9 Soient $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ deux topologies sur $X \neq \emptyset$. Supposons que (X, \mathcal{T}_1) soit T2 et (X, \mathcal{T}_2) compact. Alors $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Dém. Soit F fermé dans $(X, \mathcal{T}_2) \xrightarrow{(X, \mathcal{T}_2) \text{ comp.}} F$ est \mathcal{T}_2 -compact $\xrightarrow{\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2} F$ est \mathcal{T}_1 -compact. (X, \mathcal{T}_1) esp. T2 $\implies F$ \mathcal{T}_1 -fermé. Donc $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ et ainsi $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. ○

Soit $x \in E, x^* \in E^*$. Alors $(x, x^*) := x^*(x)$.

Théorème 7.10 Soit E un espace normé séparable et soit $K \subseteq E^*$ σ^* -compact. Alors (K, σ^*) est métrisable.

Dém. Soit $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable dense dans E . Pour $x^* \in E^*$ posons $f_n(x^*) := (x_n, x^*)$. Alors $f_n : (E^*, \sigma^*) \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire et σ^* -continue. La famille $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ sépare les points de E^* . En effet, Soit $f_n(x^*) = f_n(y^*) \forall n$. Alors $(x_n, x^*) = (x_n, y^*) \forall n$. Comme $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E , et que x^*, y^* sont $((E, \|\cdot\|), \mathbb{K})$ -continues, $(x, x^*) = (x, y^*) \forall x \in E$. Ainsi $x^* = y^*$.

Considérons sur $K \times K$ la fonction

$$d(x^*, y^*) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|f_k(x^*) - f_k(y^*)|}{1 + |f_k(x^*) - f_k(y^*)|}.$$

$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ séparante $\implies d$ définie positive. Ainsi d est une distance sur K . Dû à la convergence uniforme, f_n σ^* -continue implique que d est continue sur $K \times K$ muni avec la topologie $\sigma^* \times \sigma^*$. Ainsi $\forall x_0^* \in K$ et $\varepsilon > 0$, $\{x^* \in K : d(x^*, x_0^*) < \varepsilon\}$ est σ^* -ouvert $\implies \mathcal{T}_d \subseteq \sigma^*|_K$. \mathcal{T}_d topologie T2, $(K, \sigma^*|_K)$ compact, T2 $\xrightarrow{7.9} \mathcal{T}_d = \sigma^*|_K$. ○

Théorème 7.11 Alaoglu-Boubarki pour esp. séparables

Soit E un espace normé séparable. Alors $B^* = \{x^* \in E^* : \|x^*\| \leq 1\}$ est séquentiellement σ^* -compact, i.e. $\forall (x_n^*) \in B^*, \|x_n^*\| \leq 1, \exists (x_{n_k}^*)$ et $x^* \in B^*$ tq $x_{n_k}^* \xrightarrow{\sigma^*} x^*$, donc $(x, x_{n_k}^*) \rightarrow (x, x^*) \forall x \in E$.

Dém. Claire d'après 7.10 et 7.8.

VIII - ESPACES RÉFLEXIFS

Soit E un espace de Banach et $J : E \rightarrow E^{**}$ l'immersion canonique. Notation: Soit $x \in E, x^* \in E^*$. Alors $(x, x^*) := x^*(x)$. De même pour la dualité entre E^* et E^{**} . Donc J est définie par $(x^*, Jx) = (x, x^*)$. On rappelle que E est réflexif si J est une surjection.

Proposition 8.1 Soit E un espace normé. Supposons que E^* soit séparable. Alors E est séparable.

Dém Comme chaque partie d'un espace séparable est séparable (exo), on voit que $S^* = \{x^* \in E^* : \|x^*\| = 1\}$ est séparable. Soit $M^* = \{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dense dans S^* .

Choisir $x_n \in E$ tq $\|x_n\| = 1$ et $|(x_n, x_n^*)| \geq 1/2$ (1).

Soit $F = \text{Vect} \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Montrons que F est dense dans E . En effet, supposons qu'il existe $x^* \in E^*$ tq $x^*|_F \equiv 0$ et $\|x^*\| = 1$. Choisir $x_{n_0}^* \in M^*$ tq $\|x_{n_0}^* - x^*\| < 1/2$. Alors d'après (1):

$$1/2 > \|x_{n_0}^* - x^*\| \geq |(x_{n_0}, x_{n_0}^* - x^*)|_{x^*|_F \equiv 0} = |(x_{n_0}, x_{n_0}^*)| \geq 1/2. \text{ Contradiction.}$$

F dense dans $E \implies E$ séparable. \circ

Proposition 8.2 Soit E réflexif et $M \subseteq E$ un sev fermé de E . Alors M est réflexif.

Dém. Soit $x^* \in E^*$. Posons $x_M^* := x^*|_M$. Alors $x_M^* \in M^*$. Soit $m_0^{**} \in M^{**}$. Définir x_0^{**} par $(x^*, x_0^{**}) := (x_M^*, m_0^{**})$, où $x^* \in E^*$.

Alors x_0^{**} est linéaire et

$$|(x^*, x_0^{**})| \leq \|m_0^{**}\| \|x_M^*\| \leq \|m_0^{**}\| \|x^*\|.$$

Donc $x_0^{**} \in E^{**}$. E réflexif $\implies \exists m_0 \in E$ tq $(x^*, x_0^{**}) = (m_0, x^*) \forall x^* \in E^*$.

Montrons que $m_0 \in M$. Pour cela, soit $x^* \in E^*$ tq $x^*|_M \equiv 0$. Alors $x_M^* = 0$ et ainsi $(m_0, x^*) = (x^*, x_0^{**}) = \underbrace{(x_M^*, m_0^{**})}_{=0} = 0$. D'après Hahn-Banach $m_0 \in \overline{M} = M$.

Montrons que $J_M m_0 = m_0^{**}$. Soit $m^* \in M^*$ et x^* un prolongement linéaire continue de m^* sur E (Hahn-Banach). Alors $(m^*, m_0^{**}) = (x^*|_M, m_0^{**}) = (x^*, x_0^{**}) = (m_0, x^*) \underset{m_0 \in M}{=} (m_0, m^*) = (m^*, J_M m_0)$. Donc $J_M m_0 = m_0^{**}$. Ainsi $J_M : M \rightarrow M^{**}$ est surjective, i.e M est réflexif. \circ

Proposition 8.3 Soit E un espace de Banach. Alors E réflexif $\iff E^*$ réflexif.

Dém. " \implies ": Soit $J_0 : E \rightarrow E^{**}$ l'immersion canonique, donc $(x^*, J_0 y) = (y, x^*) \forall y \in E, x^* \in E^*$.

De même: $J_1 : E^* \rightarrow E^{***}$, $(x^{**}, J_1 y^*) = (y^*, x^{**}); \forall y^* \in E^*, x^{**} \in E^{**}$. A montrer: J_0 surjectif $\implies J_1$ surjectif.

Soit $x^{***} \in E^{***}$. Définir $x^* : E \rightarrow \mathbb{K}$ par $(x, x^*) := (J_0 x, x^{***})$, $x \in E$. Alors x^* est bien définie, linéaire (claire) et continue car:

$$|(x, x^*)| = |(J_0 x, x^{***})| \leq \|x^{***}\| \|J_0 x\| \underset{J_0 \text{ isom.}}{=} \|x^{***}\| \|x\|.$$

On a $J_1 x^* = x^{***}$ car: J_0 surjectif $\implies \forall y^{**} \in E^{**} \exists y \in E$ tq $y^{**} = J_0 y \implies$

$$(y^{**}, x^{***}) = (J_0 y, x^{***}) \underset{\text{déf}_{x^*}}{=} (y, x^*) \underset{\text{déf}_{J_0}}{=} (x^*, J_0 y) \underset{\text{déf}_{y^*}}{=} (x^*, y^{**}) \underset{\text{déf}_{J_1}}{=} (y^{**}, J_1 x^*).$$

" \impliedby " Supposons que E ne soit pas réflexif $\implies J_0(E) \subsetneq E^{**}$.

E complet, J_0 isométrie $\implies J_0(E)$ complet et ainsi fermé dans E^{**} . Hahn-Banach $\implies \exists L \in E^{***}$ tq $L|_{J_0(E)} \equiv 0$ et $L \neq 0$. (*)

Montrons que $L \notin J_1(E^*)$. Sinon, $\exists y^* \in E^*$ tq $L = J_1 y^*$

$$\implies \forall x \in E : y^*(x) = (x, y^*) \stackrel{\text{d\u00e9f}_{J_0}}{=} (y^*, J_0 x) \stackrel{\text{d\u00e9f}_{J_1}}{=} \underbrace{(J_0 x, J_1 y^*)}_{\substack{\in E^{**} \\ \in E^{***}}} = (J_0 x, L) \stackrel{(*)}{=}$$

$0 \implies y^* = 0 \implies L = 0$. Contradiction.

Donc $J_1(E^*) \subsetneq E^{***}$. Ainsi J_1 n'est pas surjectif, donc E^* pas r\u00e9flexif. \circ

Proposition 8.4. Soit F un espace r\u00e9flexif et soit T un isomorphisme hom\u00e9omorphique entre un espace norm\u00e9 E et F . Alors E est r\u00e9flexif.

D\u00e9m. Exo.

On va maintenant caract\u00e9riser les espaces norm\u00e9s pour lesquels la boule unit\u00e9 est faiblement compact.

Lemme 8.5 Soit E espace norm\u00e9 et $J : E \rightarrow E^{**}$ l'immersion canonique. Alors J est un hom\u00e9omorphisme lin\u00e9aire entre $(E, \sigma(E, E^*))$ et un sev dense de $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$. Si E est r\u00e9flexif, i.e. si J est surjectif, alors J est un hom\u00e9omorphisme lin\u00e9aire entre $(E, \sigma(E, E^*))$ et $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$.

D\u00e9m.

Soit $\sigma_1 := \sigma(E, E^*)$ la topologie faible sur E et $\sigma_2 := \sigma(E^{**}, E^*)$ la topologie faible-\u00e9toile sur E^{**} .

(1) syst\u00e8me fondamental de voisinages de 0_E par rapport \u00e0 σ_1 :

$$U_{\sigma_1} = \bigcap_{j=1}^N \{x \in E : |(x, x_j^*)| < \varepsilon\}, x_j^* \in E^*.$$

syst\u00e8me fondamental de voisinages de $0_{E^{**}}$ par rapport \u00e0 σ_2 :

$$U_{\sigma_2} = \bigcap_{j=1}^N \{x^{**} \in E^{**} : |(x_j^*, x^{**})| < \varepsilon\}, x_j^* \in E^*.$$

D'apr\u00e8s la d\u00e9finition de J : $(x^*, Jx) = (x, x^*)$. Donc $J(U_{\sigma_1}) = U_{\sigma_2} \cap J(E)$. Donc J est une application ouverte de (E, σ_1) sur $(J(E), \sigma_2|_{J(E)})$. Comme J est injective, $J^{-1} : J(E) \rightarrow E$ est $\left((J(E), \sigma_2|_{J(E)}), (E, \sigma_1) \right)$ -continue. Evidemment J est continue.

(2) Montrons que $J(E)$ est σ_2 -dense dans E^{**} .

5.14 $\implies (E^{**}, \sigma_2)$ evtlc. Soit $f : E^{**} \rightarrow \mathbb{K}$ lin\u00e9aire, σ_2 -continue et $f|_{J(E)} \equiv 0$.

5.14 $\implies \exists x_f^* \text{ tq } f(x^{**}) = (x_f^*, x^{**})$. Donc $(x_f^*, x^{**}) = 0 \forall x^{**} \in J(E)$. Ainsi $0 = (x_f^*, Jx) = (x, x_f^*) \forall x \in E$. Donc $x_f^* = 0$ et ainsi $f \equiv 0 \stackrel{5.11}{\implies} J(E)$ dense dans (E^{**}, σ_2) .

Le reste est claire. \circ

8.6 Lemme de Goldstine

Soit E un espace norm\u00e9. Alors $J(B)$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$ -dense dans B^{**} .

D\u00e9m. 7.7 $\implies B^{**}$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$ -ferm\u00e9 dans E^{**} (1).

J isom\u00e9trie $\implies J(B) \subseteq B^{**}$ (2).

(1)(2) $\implies \overline{J(B)}^{\sigma(E^{**}, E^*)} \subseteq B^{**}$. Notons que cet ensemble est convexe. Supposons que cette inclusion soit stricte. Soit $x_0^{**} \in B^{**} \setminus \overline{J(B)}^{\sigma(E^{**}, E^*)} \stackrel{2^{me}}{\implies} \exists$ forme

lin\u00e9aire $f : (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*)) \rightarrow \mathbb{K}$ continue, tq $\text{Re } f(x_0^{**}) < \gamma < \text{Re } f(x^{**}) \forall x^{**} \in \overline{J(B)}^{\sigma(E^{**}, E^*)}$. 5.14 $\implies \exists x_0^* \in E^* \text{ tq } f(x^{**}) = (x_0^*, x^{**})$. S.p.g. $\|x_0^*\| = 1$ (sinon

remplacer γ par $\gamma/\|x_0^*\|$. Alors $\forall x^{**} \in B^{**}$:

$$|\operatorname{Re}(x_0^*, x^{**})| \leq |(x_0^*, x^{**})| \leq \|x_0^*\| \|x^{**}\| \leq 1 \cdot 1 = 1.$$

Donc $-1 < \gamma < 1$. Ainsi $-1 < \gamma < \operatorname{Re}(x_0^*, Jx) = \operatorname{Re}(x, x_0^*) \forall x \in B$. Contradiction au fait que $] -1, 1[\subseteq x_0^*(B)$ resp. $\mathbb{D} \subseteq x_0^*(B)$ dans le cas complexe. \circ

Théorème 8.7 théorème de Banach-Kakutani

E espace normé, $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Alors B est $\sigma(E, E^*)$ -compact $\iff E$ réflexif.

Dém. " \Leftarrow " Soit E réflexif $\xrightarrow{8.5} J : (E, \sigma(E, E^*)) \rightarrow (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ est un homéomorphisme linéaire.

$J(E) = E^{**} \implies J(B) = B^{**}$, car, soit $x^{**} \in B^{**}$, alors $\exists x \in E$ tq $J(x) = x^{**}$. J isométrie $\implies \|x\| = \|x^{**}\| \implies x \in B \implies B^{**} \subseteq J(B) \subseteq B^{**}$.

Alaoglu-Bourbaki (7.8) $\implies B^{**}$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$ -compact $\xrightarrow{J \text{ isom.}} J^{-1}(B^{**}) = B$ est $\sigma(E, E^*)$ -compact.

" \implies " Supposons que B soit $\sigma(E, E^*)$ -compact. Comme $J : (E, \sigma(E, E^*)) \rightarrow (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ est continue, on déduit que $J(B)$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$ -compact dans E^{**} . $\sigma(E^{**}, E^*)$ étant T2 $\implies J(B)$ fermé dans $\sigma(E^{**}, E^*)$. (1)

$$8.6 \implies J(B) \text{ est } \sigma(E^{**}, E^*)\text{-dense dans } B^{**} \quad (2)$$

$$7.7 \implies B^{**} \text{ est } \sigma(E^{**}, E^*)\text{-fermé.} \quad (3)$$

(1)-(3) $\implies J(B) = B^{**}$. Soit $0_{E^{**}} \neq x^{**} \in E^{**}$. Alors $\frac{x^{**}}{\|x^{**}\|} \in B^{**} \implies \exists x \in B$ tq $Jx = \frac{x^{**}}{\|x^{**}\|} \implies x^{**} = J(\|x^{**}\| x) \implies x^{**} \in J(E)$. Donc $J(E) = E^{**}$, i.e. E réflexif. \circ

Théorème 8.8

Soit E réflexif. Alors $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ est faiblement séquentiellement compact.

Dém. Soit $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite dans B . Considérons l'adhérence F de $\operatorname{Vect}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Alors F est d'après 8.2 réflexif, i.e. $J_F(F) = F^{**}$. F séparable $\implies J_F(F) = F^{**}$ séparable $\xrightarrow{8.1} F^*$ séparable $\xrightarrow{7.11} B_{F^{**}}^{**}$ est séquentiellement $\sigma(F^{**}, F^*)$ -compact.

En particulier, si $x_n^{**} = J_F x_n$, alors $\exists n_k$ et $x_0^{**} \in F^{**}$, $\|x_0^{**}\| \leq 1$ tq $x_{n_k}^{**} \xrightarrow{\sigma(F^{**}, F^*)} x_0^{**}$, i.e. $\forall y^* \in F^*$ on a: $(x_{n_k}, y^*) = (y^*, J_F(x_{n_k})) = (y^*, x_{n_k}^{**}) \rightarrow (y^*, x_0^{**})$. F réflexif $\implies \exists x_0 \in F$ tq $J_F(x_0) = x_0^{**}$. Alors $(x_{n_k}, y^*) \rightarrow (y^*, J_F(x_0)) = (x_0, y^*) \forall y^* \in F^*$.

Si $y' \in E^*$, alors $y^* := y'|_F \in F^*$. Donc

$(x_{n_k}, y') = (x_{n_k}, y^*) \rightarrow (x_0, y^*) = (x_0, y')$ car $x_{n_k}, x_0 \in F$. On conclut que $x_{n_k} \xrightarrow{\sigma(E, E^*)} x_0$ dans E . Notons que $\|x_0\| \leq 1$. Donc B est faiblement séquentiellement compact. \circ

Remarque La réciproque est aussi vraie. Ceci est un corollaire du théorème de Banach-Kakutani et du

Théorème de Eberlein-Smulian

Soit E un espace de Banach. Alors $M \subseteq E$ faiblement compact $\iff M$ faiblement séquentiellement compact.

Nous allons montrer le cas spécial où M est la boule unité.

8.9 Lemme d'interpolation de Helly

Soit E un espace normé et $\{x_1^*, \dots, x_n^*\} \subseteq E^*$. Soient $c_j \in \mathbb{K}$, $j = 1, \dots, n$ et $M > 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

(1) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in E$ tq $x_j^*(x) = c_j$, $j = 1, \dots, n$ et $\|x\| < M + \varepsilon$

(2) $\forall a_j \in \mathbb{K} : \left| \sum_{j=1}^n a_j c_j \right| \leq M \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j^* \right\|$.

Dém (1) \implies (2): clair, car soit $T = \sum_{j=1}^n a_j x_j^*$, alors $\left| \sum_{j=1}^n a_j c_j \right| = |Tx| \leq \|T\|_{op} \|x\| \leq (M + \varepsilon) \|T\|_{op}$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

(2) \implies (1): Posons $f_j := x_j^*$. Soit $\Phi : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ définie par $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Alors $\Phi(E)$ est un sous-espace fermé de \mathbb{K}^n . Soit $\{y_1, \dots, y_k\}$ une base de $\Phi(E)$. Choisissons $z_1, \dots, z_k \in E$ tq $\Phi(z_j) = y_j$. Soit $A = \text{Vect}(z_1, \dots, z_k)$. Alors $\Psi := \Phi|_A : A \rightarrow \Phi(E)$ est bijective. Comme Ψ^{-1} est linéaire et continue (espaces de dimension finie) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tq $\Psi^{-1}(V_\delta(0)) \subset U_\varepsilon(0)$, où U_ε est une boule ouverte dans A et V_δ dans $\Phi(E)$.

Hahn-Banach $\implies \exists x^{**} \in E^{**}$ tq $\|x^{**}\| \leq M$ et $(x_j^*, x^{**}) = c_j$. 8.6 $\implies J(B)$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$ -dense dans $B^{**} \implies$ il existe une suite généralisée (y_i) dans E , $\|y_i\| \leq M$, tq $\forall x^* \in E^* : (y_i, x^*) = (x^*, Jy_i) \rightarrow (x^*, x^{**})$. En particulier, $f_j(y_i) = (y_i, x_j^*) \rightarrow c_j$, i.e. $\lim_i |f_j(y_i) - c_j| = 0$. Notons que $(f_1(y_i), \dots, f_n(y_i)) \in \Phi(E)$ et que $\Phi(E)$ est fermé. Donc $(c_1, \dots, c_n) \in \Phi(E)$ et

$(f_1(y_i) - c_1, \dots, f_n(y_i) - c_n) \in \Phi(E)$.

Choisissons i tq $|f_j(y_i) - c_j| < \delta \forall j \in \{1, \dots, n\}$. Alors $\exists w \in U_\varepsilon$ tq $\Phi(w) = (-f_1(y_i) + c_1, \dots, -f_n(y_i) + c_n)$. Donc $\Phi(y_i + w) = (c_1, \dots, c_n)$ et $\|y_i + w\| \leq M + \varepsilon$. \circ

8.10 Lemme de Riesz Soit E un espace normé et $F \subseteq E$ un sev fermé propre. Alors $\forall 0 < \eta < 1 \exists x_\eta \in E$, $\|x_\eta\| = 1$ tq $\text{dist}(F, x_\eta) > \eta$. en particulier, si $\dim E = \infty$, la boule unité $B = \{\|x\| \leq 1\}$ n'est pas compact

Dém. Soit $y \in E \setminus F$. Posons $d := \text{dist}(y, F) \implies \exists (x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ tq $\|x_n - y\| \rightarrow d$. Notons que $d > 0 \xrightarrow{0 < \eta < 1} \exists z \in F$ tq $0 < \|z - y\| < d/\eta$. Posons $\gamma = \frac{1}{\|z - y\|}$ et $x_\eta = \gamma(y - z)$. Alors $\gamma > \eta/d$ et $\|x_\eta\| = 1$. En plus, $\forall x \in F$:

$$\|x - x_\eta\| = \|x - \gamma(y - z)\| = \|x + \gamma z - \gamma y\| = \gamma \left\| \underbrace{\left(\frac{1}{\gamma}x + z\right)}_{\in F} - y \right\| \geq \gamma \text{dist}(y, F) = \gamma d > \eta.$$

Soit $\dim E = \infty$. En prenant $\eta = 1 - 1/n$ on trouve, par récurrence, $x_n \in E \setminus F_{n-1}$, où $F_n = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ tel que $\|x_n\| = 1$ et $\text{dist}(x_n, F_{n-1}) > 1 - 1/n$. Donc $\|x_n - x_m\| \geq 1 - 1/n$ si $n > m$. Ainsi (x_n) n'admet pas de sous-suites convergentes, donc B n'est pas compact. \circ

Remarque: Il est clair qu'on peut remplacer $\|x_n\| = 1$ par $\|x_n\| < 1$.

8.11 Théorème (R.C. James)

Soit E un espace de Banach, $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ et $B^* = \{x^* \in E^* : \|x^*\| \leq 1\}$.

Alors sont équivalentes:

- (1) E réflexif
- (2) B faiblement compact
- (3) B faiblement séquentiellement compact
- (4) Soit $0 < \theta < 1$. Alors il n'existe pas de suite $(x_n, x_n^*) \in B \times B^*$ telle que $x_i^*(x_j) = \theta$ pour $1 \leq i \leq j$ et $x_i^*(x_j) = 0$ pour $i > j$. (*)

Dém (1) \iff (2): 8.7

(1) \implies (3): 8.8

(3) \implies (4): Montrons la contraposée. Soit (x_n, x_n^*) une suite dans $B \times B^*$ satisfaisant (*). Montrons que (x_n) ne possède pas de sous-suite qui converge faiblement. En effet, supposons que $x_{n_k} \xrightarrow{\sigma(E, E^*)} \xi \in E$. Alors $x_n^*(\xi) = \lim_k x_n^*(x_{n_k}) = \theta$ pour tout n . Mazur (7.4) $\implies \xi$ est un point adhérent de l'enveloppe convexe des x_n . En particulier, $\exists x_j, \exists \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^p \lambda_j = 1$ tq $\|\xi - \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j\| < \theta$. Mais alors $\forall n > p$ on a: $|x_n^*(\xi)| < \theta$ car $x_n^*(x_j) = 0 \forall j < n$. Contradiction.

(4) \implies (1). Montrons la contraposée. Soit E non réflexif et soit $0 < \theta < 1$. Posons $\hat{E} = J(E)$, où J est l'immersion canonique de E dans E^{**} . Comme \hat{E} est un fermé strictement inclus dans E^{**} , $\exists_{8.10} x^{**} \in E^{**}$ tq $\text{dist}(x^{**}, \hat{E}) > \theta$ et $\theta < \|x^{**}\| < 1$.

Nous construisons par récurrence une suite (x_n, x_n^*) tq

- (a) $\|x_n\| < 1$ et $\|x_n^*\| < 1$,
- (b) $x^{**}(x_n^*) = \theta$ pour tout n ,
- (c) $x_i^*(x_j) = \theta$ si $i \leq j$,
- (d) $x_i^*(x_j) = 0$ si $i > j$.

En effet, comme $\|x^{**}\| > \theta, \exists x_1^* \text{ tq } \|x_1^*\| < 1 \text{ et } x^{**}(x_1^*) = \theta. \|x^{**}\| < 1 \implies \|x_1^*\| > \theta$. Ainsi $\exists x_1 \text{ tq } \|x_1\| < 1 \text{ et } x_1^*(x_1) = \theta$.

Supposons que pour chaque $n < p$ les éléments x_n et x_n^* aient été choisis et que (a)-(d) soient satisfaites pour ces éléments. Cherchons x_p^* tq

(*) $\|x_p^*\| < 1, x^{**}(x_p^*) = \theta$ et $x_p^*(x_j) = 0$ pour $j < p$.

Soit $\hat{x}_j = J_E(x_j)$. Posons $M = \theta / (\text{dist}(x^{**}, \hat{X}))$. Alors $M < 1$ et

$$\theta \leq M \|x^{**} + \sum_{j=1}^{p-1} a_j \hat{x}_j\| \quad (H).$$

Le lemme de Helly (8.9) (appliqué à $c_1 = \theta$ et $c_j = 0$ ($j > 1$)) implique qu'une solution x_p^* de (*) existe.

Il reste à montrer qu'on peut choisir x_p tq $\|x_p\| < 1$ et $x_i^*(x_p) = \theta$ si $i \leq p$.

La condition de Helly sera dans ce cas: $|\sum_{j=1}^p a_j \theta| \leq \tilde{M} \|\sum_{j=1}^p a_j x_j^*\|$.

Mais celle-ci est satisfaite, car

$$\begin{aligned} |\sum_{j=1}^p a_j \theta| &= \left| \sum_{j=1}^p a_j x^{**}(x_j^*) \right| = \\ &= \left| x^{**}(\sum_{j=1}^p a_j x_j^*) \right| \leq \|x^{**}\| \|\sum_{j=1}^p a_j x_j^*\|. \end{aligned}$$

○

Annexe 3 Théorèmes de représentation

Proposition A3.1. Chaque espace métrique E est isométrique à une partie de l'espace de Banach $(\mathcal{B}(E), \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions continues et bornées sur E .

Dém. Fixons $a \in E$. Pour $x \in E$ soit $L_x : E \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $L_x(b) = d(x, b) - d(a, b)$, $b \in E$. Alors L_x est continue et $|L_x(b)| \leq d(x, a) \forall b \in E$. Donc $L_x \in \mathcal{B}(E)$. En plus, $\|L_x - L_y\|_\infty = \sup_{b \in E} |d(x, b) - d(y, b)| \leq d(x, y)$ et $\|L_x - L_y\|_\infty \geq |d(x, x) - d(y, x)| = d(x, y)$. Donc $\|L_x - L_y\|_\infty = d(x, y)$.

L'application $x \mapsto L_x$ est l'isométrie cherchée. \circ

Proposition A3.2. Soit E un espace normé. Alors il existe un esp. top. K , T2, compact, tq E soit isomorphe-isométrique à un sous-espace de l'espace de Banach $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$.

Dém. Soit $B^* = \{x^* \in E^* : \|x^*\| \leq 1\}$ et $K = (B^*, \sigma^*)$. Alaoglu-Bourbaki $\implies K$ compact. Comme la topologie faible-étoile σ^* est T2 et que cette propriété est héréditaire, K est T2.

Soit $f_x : B^* \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $f_x(x^*) = (x, x^*)$, $x \in E$ et soit $T : E \rightarrow C(K)$ donnée par $T(x) = f_x$. Alors T est bien définie, car les fonctionnelles $x^* \mapsto (x, x^*)$ sont σ^* continues sur E^* . T est linéaire et $\|Tx\|_\infty = \|f_x\|_\infty = \max_{x^* \in K} |f_x(x^*)| = \max_{x^* \in E^*, \|x^*\| \leq 1} |(x, x^*)| \stackrel{1.11}{\underset{HB}}{=} \|x\|$. Donc T est un isomorphisme isométrique. \circ

IX - OPÉRATEURS SUR DES ESPACES DE HILBERT

Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une application de $E \times E$ dans \mathbb{K} tel que

$$\mathbf{H1} \quad \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle,$$

$$\mathbf{H2} \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},$$

$$\mathbf{H3} \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ et } \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$$

Une telle application (ou forme) est dite hermitienne. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit encore qu'elle est symétrique.

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ muni avec une forme hermitienne est dite un espace préhilbertien, si en plus E est complet par rapport à la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, alors E est une espace de Hilbert.

Si $M \subseteq E$, alors $M^\perp = \{x \in E : \forall m \in M : \langle x, m \rangle = 0\}$ est l'orthogonal de M . M^\perp est un sev fermé de E . Rappel:

9.1 Lemme Soient H un espace de Hilbert et F et G deux sous-espaces fermés de H tel que $F \perp G$. Alors leur somme $F + G$ est directe et $F + G$ est fermé.

9.2 Théorème Si E est un espace préhilbertien et si $F \subseteq E$ est un sev complet de E , alors $E = F \oplus F^\perp$; en particulier, F admet un supplémentaire topologique.

9.3 Corollaire Soit E un espace de Hilbert et $F \subseteq E$ un sev. Alors

$$a) \quad E = \overline{F} \oplus F^\perp$$

$$b) \quad \overline{F} = F^{\perp\perp},$$

$$c) \quad F \text{ dense dans } E \iff F^\perp = \{0\}.$$

9.4 Théorème de Fréchet-Riesz

a) Si E est un espace préhilbertien et $y \in E$, alors l'application f définie par $f(x) = \langle x, y \rangle$ est une forme linéaire continue sur E et $\|f\|_{op} = \|y\|$.

b) Si E est un espace de Hilbert, alors $\forall f \in E^* \exists y \in E$ tel que $\forall x \in E : f(x) = \langle x, y \rangle$.

L'adjoint dans les espaces de Hilbert:

Soient E, F des espaces de Banach, $T \in L(E, F)$. L'opérateur dual $T^* : F^* \rightarrow E^*$ était défini par:

$$(Tx, y^*) = (x, T^*y^*), \quad \forall x \in E, y^* \in F^*.$$

Supposons maintenant que E et F sont des espaces de Hilbert et que $T \in L(E, F)$. Notons que $\forall x^* \in E^* \exists \xi_{x^*} \in E$ telque $(x, x^*) = \langle x, \xi_{x^*} \rangle$. L'application $T_E : E^* \rightarrow E, x^* \mapsto \xi_{x^*}$ est une isométrie bijective anti-linéaire et $\|T_E\| = 1$. On définit l'opérateur adjoint T_* de T par: $T_* = T_E \circ T^* \circ T_F^{-1}$.

9.5 Proposition Soient E, F des espaces de Hilbert et $T \in L(E, F)$. Alors

$$a) \quad T_* \in L(F, E), \|T_*\| = \|T^*\| = \|T\|,$$

$$b) \quad T_* \text{ est caractérisé par: } \langle Tx, y \rangle_F = \langle x, T_*y \rangle_E \quad \forall x \in E, \forall y \in F.$$

c) T_* est l'unique élément de $L(F, E)$ qui satisfait légalité ci-dessus.

Par abus de notation, on écrit de nouveau T^* pour T_* .

9.6 Proposition Soit H un espace de Hilbert et $T, S \in L(H)$. Alors

- a) $T^{**} = T$,
- b) $(T + S)^* = T^* + S^*$,
- c) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^* \forall \alpha \in \mathbb{K}$.
- d) $\|T^* \circ T\| = \|T \circ T^*\| = \|T\|^2$,
- e) $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.

Dém. (d) $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle \leq \|x\| \|T^*Tx\| \leq \|T^*T\| \|x\|^2 \implies \|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2 \implies \|T\|^2 = \|T^*T\| \implies \|T\|^2 = \|T^*\|^2 = \|T^{**}T^*\| = \|TT^*\|$.

9.7 Proposition Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$. Alors (voir 1.16)

- a) $\text{Ker } T^* = R(T)^\perp$ et $\text{Ker } T = R(T^*)^\perp$,
- b) $\overline{R(T)} = (\text{Ker } T^*)^\perp$ et $\overline{R(T^*)} = (\text{Ker } T)^\perp$.

Définitions Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$.

- (1) T est dit *normal* si $TT^* = T^*T$.
- (2) T est dit *autoadjoint* (ou *hermitien*) si $T = T^*$; (dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on dit encore que T est *symétrique*.)
- (3) T est dit *unitaire* si $TT^* = T^*T = id$ (i.e. si T est inversible et $T^{-1} = T^*$.)
- (4) T est dit *idempotent* si $T^2 := T \circ T = T$; (i.e. si T est une projection).

9.8 Théorème de Hellinger-Toeplitz Soit H un espace de Hilbert et $T \in \ell(H)$ une application linéaire tel que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Alors T est continue et T est autoadjoint.

Dém. Soit (x_n) une suite de H tel que $x_n \rightarrow 0$ et $Tx_n \rightarrow y$. D'après le théorème du graphe fermé il suffit de montrer que $y = 0$. Mais ceci découle de

$$\langle y, y \rangle = \langle \lim Tx_n, y \rangle = \lim \langle Tx_n, y \rangle = \lim \langle x_n, Ty \rangle = 0.$$

○

9.9 Lemme Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$ normal. Alors $\|T^2\| = \|T\|^2$.

Dém. On utilise 9.6(d): $\|T^2\|^2 = \|(T^2)(T^2)^*\| = \|T(TT^*)T^*\| = \|(T(T^*T)T^*)\| = \|(TT^*)(TT^*)\| = \|(TT^*)^*(TT^*)\| = \|TT^*\|^2 = \|T\|^4 \implies \|T^2\| = \|T\|^2$. ○

9.10 Proposition Soit H un espace de Hilbert sur le corps \mathbb{C} et $T \in L(H)$. Alors T est hermitien $\iff \langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R} \forall x \in H$.

Dém. Supposons que $T = T^*$. Alors $\langle Tx, x \rangle = \langle x, T^*x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}$. Donc $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$.

Pour montrer la réciproque, soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Considérons le nombre *réel*

$$\langle T(x+\lambda y), x+\lambda y \rangle = \langle Tx, x \rangle + \lambda \langle Ty, x \rangle + \bar{\lambda} \langle Tx, y \rangle + |\lambda|^2 \langle Ty, y \rangle .$$

En prenant le conjugué complexe on obtient:

$$\langle T(x+\lambda y), x+\lambda y \rangle = \langle Tx, x \rangle + \bar{\lambda} \langle x, Ty \rangle + \lambda \langle y, Tx \rangle + |\lambda|^2 \langle Ty, y \rangle .$$

En particulier, pour $\lambda = 1$ et $\lambda = -i$:

$$\begin{aligned} \langle Tx, y \rangle + \langle Ty, x \rangle &= \langle y, Tx \rangle + \langle x, Ty \rangle , \\ \langle Tx, y \rangle - \langle Ty, x \rangle &= -\langle y, Tx \rangle + \langle x, Ty \rangle . \end{aligned}$$

Addition nous donne que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$. ○

De façon similiaire on montre :

9.11 Proposition Soit H un espace de Hilbert sur le corps \mathbb{C} et $T \in L(H)$. Alors $T = 0 \iff \langle Tx, x \rangle = 0 \forall x \in H$.

Remarques

a) Ces deux propositions ne sont plus vraies (en général) pour des espaces de Hilbert sur le corps \mathbb{R} . Prenons \mathbb{R}^2 et comme T la rotation de 90 degrés.

b) Si, cependant T est symétrique, alors 9.11 reste vraie pour les espaces réels, ceci découle du résultat suivant:

9.12 Proposition Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$ autoadjoint. Alors

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : \|x\| \leq 1\}.$$

Dém. Posons $M = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : \|x\| \leq 1\}$. Il est clair que $\|T\| \geq M$, car pour $\|x\| \leq 1$ on a: $|\langle Tx, x \rangle| \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \|Tx\| \|x\| \stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \|T\| \|x\|^2 \leq \|T\|$. Comme $T = T^*$ on a:

$$\begin{aligned} \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle &= 2\langle Tx, y \rangle + 2\langle Ty, x \rangle = \\ &= 2\langle Tx, y \rangle + 2\overline{\langle x, Ty \rangle} \stackrel{T=T^*}{=} 4\text{Re} \langle Tx, y \rangle . \end{aligned}$$

Comme $|\langle Tx, x \rangle| \stackrel{\text{def } M}{\leq} M\|x\|^2$, on déduit que

$$4\text{Re} \langle Tx, y \rangle \leq M(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2M(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Donc $\text{Re} \langle Tx, y \rangle \leq M \forall x, y \in H$ avec $\|x\| = \|y\| \leq 1$.

Si $\langle Tx, y \rangle = e^{i\theta} |\langle Tx, y \rangle|$, on remplace x par $e^{i\theta} x$ et on conclut que $|\langle Tx, y \rangle| \leq M \forall x, y \in H$ avec $\|x\| = \|y\| = 1 \implies \|Tx\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle Tx, y \rangle| \leq M \implies \|T\| \leq M$. ○

9.13 Proposition Soit H un espace de Hilbert, $T \in L(H)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

- a) T est normal
 b) $\langle Tx, Ty \rangle = \langle T^*x, T^*y \rangle \quad \forall x, y \in H$
 c) $\|Tx\| = \|T^*x\| \quad \forall x \in H$.

Dém. a) \implies b):

$$T \text{ normal} \implies \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, T^*Ty \rangle = \langle x, TT^*y \rangle = \langle T^*x, T^*y \rangle.$$

b) \implies c) trivial.

c) \implies a) : On a $\langle T^*Tx, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x \rangle = \langle TT^*x, x \rangle$. Comme TT^* et T^*T sont autoadjoint, la normalité découle de 9.11 et de la remarque (b) appliquée à $TT^* - T^*T$. \circ

9.14 Corollaire Soit H un espace de Hilbert, $T \in L(H)$ normal. Alors $\text{Ker } T = \text{Ker } T^* = R(T)^\perp = R(T^*)^\perp$.

9.15 Proposition Soient E un espace préhilbertien et $T \in L(E)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

- a) T est une isométrie
 b) $T^*T = id$
 c) $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in E$.

Proposition 9.16 Soit H un espace de Hilbert, et $T \in L(H)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

- a) T est unitaire
 b) T est surjective et $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in H$,
 c) T est un isomorphisme isométrique.

Dém a) \implies b): Soit $z \in H$. Posons $x = T^*z$. Alors $Tx = TT^*z = z \implies T$ surjective et $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, T^*Ty \rangle = \langle x, y \rangle$.

b) \implies a): $\forall x, y : \langle T^*Tx, y \rangle = \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \implies \langle T^*Tx - x, y \rangle = 0$. Soit $y = T^*Tx - x$. Alors $T^*Tx = x$. T surjective $\implies \exists x \in H$ tel que $y = Tx$. Donc $TT^*y = TT^*Tx = Tx = y$.

(b) \iff (c) découle de 9.15. \circ

Théorie de Riesz-Schauder pour les espaces de Hilbert

9.17 Théorème Soit H un espace de Hilbert, $T \in L(H)$ et T^* l'adjoint de T . Alors

- a) $\lambda \in \sigma(T) \iff \bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$,
 b) Si T est hermitien, alors $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$,
 c) Si T est normal et si x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ de T , alors $T^*x = \bar{\lambda}x$.
 d) Si T est normal et si x, y sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, alors $x \perp y$.
 e) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et T est normal, alors $\exists \lambda \in \sigma(T)$ tel que $|\lambda| = \|T\|$.
 f) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et T est symétrique, alors $\|T\|$ ou $-\|T\|$ est une valeur spectrale de T .

Dém. (a) On voit que $\lambda \in \sigma(T) \iff \bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$ car $T - \lambda I$ est inversible $\iff (T - \lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda} I$ est inversible.

(b) Soit T hermitien. Si H est un espace sur le corps \mathbb{R} , alors, par définition, $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. Donc soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $a + ib \in \sigma(T)$. Alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $a + i(b + \lambda) \in \sigma(T + i\lambda I)$; donc $|a + i(b + \lambda)| \leq \|T + i\lambda I\|$. Ainsi $a^2 + (b + \lambda)^2 \leq \|T + i\lambda I\|^2 \stackrel{9.6d}{=} \|(T + i\lambda I)(T + i\lambda I)^*\| = \|(T + i\lambda I)(T^* - i\bar{\lambda}I)\| \stackrel{T=T^*}{=} \|(T + i\lambda I)(T - i\bar{\lambda}I)\| = \|T^2 + \lambda^2 I\| \leq \|T\|^2 + \lambda^2$. Donc $a^2 + b^2 + 2b\lambda \leq \|T\|^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Ceci implique que $b = 0$.

(c) Utilisons: T normal $\implies T - \lambda I$ normal. Alors $\text{Ker}(T - \lambda I) \stackrel{9.14}{=} \text{Ker}[(T - \lambda I)^*] \stackrel{9.6}{=} \text{Ker}(T^* - \bar{\lambda}I)$.

(d) T normal, $\lambda \neq \mu$, $Tx = \lambda x, Ty = \mu y \stackrel{(c)}{\implies} \lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \stackrel{(c)}{=} \langle x, \bar{\mu}y \rangle = \bar{\mu} \langle x, y \rangle \implies \langle x, y \rangle = 0$.

(e) $\mathbb{K} = \mathbb{C}, T$ normal. Montrons que $r(T) = \|T\|$. En effet, T normal $\implies T^n$ normal. Lemme 9.9 $\implies \|T\|^{2^k} = \|T^{2^k}\|$. Théorème 4.7 $\stackrel{\mathbb{K}=\mathbb{C}}{\implies} r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^{2^k}\|^{1/2^k} = \|T\|$. $\sigma(T)$ compact $\implies \exists \lambda \in \sigma(T)$ tel que $|\lambda| = r(T) = \|T\|$.

(f) Prop 9.12 $\stackrel{T \text{ sym.}}{\implies} \exists (x_n), \|x_n\| = 1$, telque $|\langle Tx_n, x_n \rangle| \rightarrow \|T\|$. En passant à une sous-suite, on peut supposer que $\lambda := \lim \langle Tx_n, x_n \rangle$ existe. Comme $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les valeurs de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se trouvent dans \mathbb{R} . Ainsi $\lambda = \pm \|T\|$. On va montrer que $\|Tx_n - \lambda x_n\| \rightarrow 0$. Admettons cela, alors $T - \lambda I$ n'est pas inversible. Donc $\lambda \in \sigma(T)$. Dû à la symétrie de T on a:

$$\begin{aligned} \|Tx_n - \lambda x_n\|^2 &= \langle Tx_n - \lambda x_n, Tx_n - \lambda x_n \rangle = \|Tx_n\|^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle + \lambda^2 \|x_n\|^2 \leq \\ &\leq \|T\|^2 \|x_n\|^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle + \lambda^2 \|x_n\|^2 = 2\lambda^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow 0 \end{aligned}$$

○

9.18 Lemma Soit E un espace préhilbertien, $F \subseteq E$ un sev et $x_0 \in E$. Pour $y_0 \in F$ sont équivalentes:

- (1) $\|x_0 - y_0\| = \text{dist}(x_0, F)$,
- (2) $x_0 - y_0 \perp F$.

9.19 Proposition Soit E un espace préhilbertien, $F \subseteq E$ un sev complet. Alors $\forall x_0 \in E \exists ! y_0 \in F$ telque $\|x_0 - y_0\| = \text{dist}(x_0, F)$. En plus, y_0 est l'élément unique de F telque $x_0 - y_0 \perp F$. On appelle y_0 la projection orthogonal de x_0 sur F ; notation: $y_0 = Px_0$.

$P : E \rightarrow E$ est une application linéaire continue idempotent, i.e $P^2 = P$, et $\|P\| = 1$ si $P \neq 0$. $\text{Ker } P = F^\perp$ et $R(P) = F =$ l'ensemble des points fixes de P .

Définition On dit qu'un espace de Hilbert H est *somme hilbertienne* des sous-espaces fermés E_n orthogonaux deux à deux, si l'espace vectoriel engendré par la réunion des E_n est dense dans H et on écrit: $H = \bigoplus E_n$

9.20 Théorème spectral Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur compact. Alors $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}^*\}$, où (λ_n) est soit une suite finie, soit une suite infinie

de valeurs propres non nulles convergeante vers 0. Soit E_n l'espace propre associé à λ_n . Posons $E_0 = \text{Ker } T$ et $\lambda_0 = 0$. Supposons que T soit symétrique dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou normal si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors:

- a) $E_n \perp E_j \forall n \neq j$,
- b) $H = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_n$ est la somme hilbertienne des espaces propres associés à T ,
- c) $T = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j P_j$, et $T^* = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\lambda_j} P_j$, où P_j est la projection orthogonale de H sur l'espace propre E_j ; (convergence par rapport à $\|\cdot\|_{op}$).
- d) $\|T\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_k|$.

Dém Notons d'abord que $E_j = \text{Ker}(T - \lambda_j I)$ et que d'après le théorème de Riesz-Schauder $\dim E_j < \infty$ et $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$.

a) T normal $\xrightarrow{9.17} E_j \perp E_k$.

b) Soit F égal au sous-espace engendré par tous les E_j . A montrer (9.3) que $F^\perp = \{0\}$. Remarquons d'abord que $T(E_j) \subseteq E_j$ et que $T^*(E_j) \subseteq E_j$. En effet, soit $x \in \text{Ker}(T - \lambda_j I)$. Alors $(T - \lambda_j I)(Tx) = T(Tx - \lambda_j x) = T(0) = 0$ et $(T - \lambda_j I)(T^*x) = T^*(Tx - \lambda_j x) = T^*(0) = 0$ car T et T^* commutent. On conclut que $T(F) \subseteq F$ et que $T^*(F) \subseteq F$. Il en est de même de F^\perp . En effet, soit $x \in F^\perp$ et $y \in F$. Alors $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = 0$ car $T^*y \in F$. En plus $\langle T^*x, y \rangle = \langle y, T^*x \rangle = \overline{\langle Ty, x \rangle} = 0$ car $Ty \in F$. Il en résulte que $S = T|_{F^\perp} \in \mathcal{K}(F^\perp)$, dont l'adjoint S^* est $T^*|_{F^\perp}$. En plus, S est symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et normal si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On va montrer que $\sigma(S) \subseteq \{0\}$. Supposons $\exists \lambda \in \sigma_p(S) \setminus \{0\} \implies \exists x \neq 0, x \in F^\perp$ tel que $Sx - \lambda x = 0$; Donc $Tx = \lambda x$. Ainsi $x \in E_j$ pour un certain j et donc $x \in F$. Mais $F \cap F^\perp = \{0\}$. Contradiction. Donc $\sigma(S) \subseteq \{0\}$.

Si $F^\perp \neq \{0\}$, alors 9.17 (e)-(f) $\implies \sigma(S) \neq \emptyset \implies \sigma(S) = \{0\}$. 9.17 (f) $\implies \|S\| = 0 \implies S = 0 \implies F^\perp \subseteq \text{Ker } T$. Mais $\text{Ker } T = E_0 \subseteq F$. Contradiction. Donc $F^\perp = \{0\}$. Ainsi $\bigoplus_{j=0}^{\infty} E_j = H$, i.e. $\forall x \in H \forall \varepsilon > 0 \exists e_j \in E_j, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\|x - \sum_{j=0}^N e_j\| < \varepsilon$. Mais on aura plus.

Soit $x \in H$. Alors $x = \sum_{j=0}^{\infty} P_j x$. Pour voir cela, soit $F_N = E_0 \oplus \dots \oplus E_N \xrightarrow{(a)} F_N$ sev complet. Soit $Q = \sum_{j=0}^N P_j$. On va montrer que Q est la projection orthogonale sur F_N . En effet le vecteur $x - Qx$ est orthogonal à chaque $E_j, j = 0, \dots, N$, (car $x - P_j x \perp E_j$); donc $x - Qx \perp F_N$. Ainsi Q est la projection orthogonale sur $F_N \implies \|x - \sum_{j=0}^N P_j x\| \leq \|x - \sum_{j=1}^N e_j\| < \varepsilon$. Donc $x = \sum_{j=0}^{\infty} P_j x$.

Dû à la continuité de T on obtient: $x \in H \implies x = \sum P_j x \implies Tx = \sum T(P_j x) = \sum \lambda_j P_j x$. Posons $x_j = P_j x$. Il est claire que $P_j(\sum_{k=0}^{\infty} x_k) = x_j$. Donc $\forall n$

$$\begin{aligned} & \|(T - \sum_{j=0}^n \lambda_j P_j)(x)\|^2 = \|(T - \sum_{j=0}^n \lambda_j P_j)(\sum_{k=0}^{\infty} x_k)\|^2 = \\ & = \|\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k - \sum_{j=0}^n \lambda_j P_j(\sum_{k=0}^{\infty} x_k)\|^2 = \|\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k - \sum_{j=0}^n \lambda_j x_j\|^2 = \|\sum_{k>n} \lambda_k x_k\|^2 = \\ & = \sum_{k>n} |\lambda_k|^2 \|x_k\|^2 \leq \sup_{k>n} |\lambda_k|^2 \sum_{k>n} \|x_k\|^2 \leq \sup_{k>n} |\lambda_k|^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Notons que (λ_k) est une suite qui converge vers 0 si elle est infinie. Donc

$$\|T - \sum_{j=0}^n \lambda_j P_j\|_{op}^2 \leq \sup_{k>n} |\lambda_k|^2 \rightarrow 0$$

si $n \rightarrow \infty$. Ceci montre que $T = \sum \lambda_j P_j$. Par le même procédé on voit que $\|Tx\|^2 \leq \sup |\lambda_k|^2 \sum \|x_k\|^2 = \sup |\lambda_k|^2 \|x\|^2$. Donc $\|T\|_{op} \leq \sup_k |\lambda_k|$. Soit $|\lambda_{n_0}| = \sup |\lambda_k|$. Alors on obtient égalité en prenant pour x n'importe quel élément de E_{n_0} de norme 1. \circ

Remarque: Le Théorème spectral nous dit donc qu'il existe une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T ; une telle base "diagonalise" T .

Calcul fonctionnel: Soient H un espace de Hilbert sur \mathbb{C} , $T \in L(H)$ et $Q(z) = a_0 + a_1 z + a_N z^N \in \mathbb{K}[z]$ un polynome. Posons $Q(T) = a_0 + a_1 T + \dots + a_N T^N$. Alors, si T est normal, $Q(T) = \sum_{j=0}^{\infty} Q(\lambda_j) P_j$, car pour $N = 2$ on a: $T^2 = \left(\sum_j \lambda_j P_j\right) \circ \left(\sum_k \lambda_k P_k\right) = \sum_{j,k} \lambda_j \lambda_k \underbrace{P_j \circ P_k}_{\delta_{j,k} P_j} = \sum_j \lambda_j^2 P_j$.

De même: $T^n = \sum_j \lambda_j^n P_j$.

De façon général, si $f(z) = \sum_k a_k z^k$ converge pour $|z| \leq C$ avec $C > \|T\|_{op}$, alors $f(T) := \sum_k a_k T^k$ converge en norme et $f(T) = \sum_j f(\lambda_j) P_j$.

X L'OPÉRATEUR SHIFT SUR ℓ^2

Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$. Un sev S de H est dit un *sous-espace invariant* (sevi) pour T si (1) S est fermé, (2) $TS \subseteq S$. On va caractériser les sevis pour l'opérateur de shift $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$, $T(a_0, a_1, a_2, \dots) = (0, a_0, a_1, \dots)$.

Il est clair que chaque sev de la forme $S_N = \{(0, \dots, 0, a_N, a_{N+1}, \dots) : (a_j) \in \ell^2\}$ est un sevi. Notons que $S_N = T^N \ell^2$. Réalisons ℓ^2 comme espace de (classes d'équivalences) de fonctions:

$$\mathcal{H}^2 = \{f \in L^2(\partial\mathbb{D}) : \hat{f}(n) = 0 \forall n \in \{-1, -2, \dots\}\},$$

où $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt$ est le coefficient de Fourier de f . Notons $d\sigma = \frac{dt}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée.

Via la représentation de Poisson,

$$f \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2} f(e^{it}) dt,$$

\mathcal{H}^2 est isomorphe isométrique à l'espace de Hardy

$$\begin{aligned} H^2(\mathbb{D}) &= \{f \text{ holomorphe dans } \mathbb{D}, \|f\|_2^2 := \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt < \infty\} = \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}. \end{aligned}$$

L'opérateur de shift n'est donc rien d'autre que l'opérateur de multiplication $g \mapsto zg$ sur H^2 . Les sev S_n ci-dessus correspondent à

$$\{f \in H^2 : f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0\} = z^n H^2.$$

Notons que $f(0) = \hat{f}(0)$ si $f \in H^2$.

Soit $u \in \mathcal{H}^2$ telque $|u| = 1$ presque partout (on dit que u est une fonction intérieure). Alors l'application $\mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2, f \mapsto uf$ est une isométrie de \mathcal{H}^2 ; donc l'image $S := u\mathcal{H}^2$ est un sev fermé de \mathcal{H}^2 . En plus, $TS \subseteq S$, car $uf \in S \implies T(uf) = zu f \in S$. Donc S est un sevi pour l'opérateur de shift. Si $u(z) = z^n$, on obtient de nouveau le S_n ci-dessus. En général, on ne peut plus décrire ces sevi par leur coefficients (a_n) .

Autres fonctions intérieures:

- Les produits de Blaschke $B(z) = z^N \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z}, \sum_n (1 - |a_n|) < \infty, a_n \neq 0$. Posons $a_0 = 0$. Si $a_n \neq a_m$, on obtient que $BH^2 = \{f \in H^2 : f(a_j) = 0 \forall j \in \mathbb{N}\}$ (Riesz).

- $S(z) = \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right)$, ou plus général:

$$S_\mu(z) = \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t)\right), \mu \perp \sigma, \mu \geq 0.$$

10.1 Lemme (1) Soit $f \in L^1, \hat{f}(n) = 0 \forall n \in \mathbb{Z} \implies f \equiv 0$ p.p.

(1) $f \in L^1, \hat{f}(n) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}^* \implies f \equiv \text{const}$ p.p.

Dém. (1) $\hat{f}(n) = 0 \implies \int e^{-int} f(e^{it}) d\sigma = 0 \implies \int p f d\sigma = 0$ pour $p \in \mathcal{T} =$ l'ensemble des polynomes trigonométriques $p(e^{i\theta}) = \sum_{-N}^N a_n e^{in\theta}, a_n \in \mathbb{C}$.

Soit μ le mesure de densité f , i.e $d\mu = f d\sigma$. Alors $\mu \perp \mathcal{T}$. Comme $\overline{\mathcal{T}}^{\|\cdot\|_\infty} = C(\partial\mathbb{D})$ (Weierstrass), on déduit que $\mu \perp C(\partial\mathbb{D}) \xrightarrow{\text{Hahn-Banach}} \mu = 0 \implies f \equiv 0$.

(2) $g = f - \hat{f}(0) \implies \hat{g}(n) = 0 \forall n \in \mathbb{Z} \implies g \equiv \hat{f}(0)$. ○

10.2 Théorème de Beurling Soit S un sous espace invariant pour l'opérateur de shift sur \mathcal{H}^2 . Alors $S = \{0\}$ ou $S = u\mathcal{H}^2$ pour une fonction intérieure u .

Dém. Supposons que $S \neq \{0\}$. Considérons la décomposition orthogonal $\mathcal{H}^2 = S \oplus S^\perp$ de \mathcal{H}^2 et soit ψ la projection orthogonale de la fonction 1 sur S . Alors $1 = \psi + (1 - \psi)$. S.p.g. on peut supposer que les fonctions dans S n'ont pas de zéros communs à l'origine, sinon on regarde $S_0 = \{f/z^m : f \in S\}$, où $m = \min_{f \in S} \text{ord}(f; 0)$. Notons que $S = z^m S_0 \implies S_0$ fermé car l'opérateur de multiplication avec z^m est une isométrie. En plus, $zS_0 \subseteq S_0$. Donc, si $S_0 = u\mathcal{H}^2$, alors $S = (z^m u)\mathcal{H}^2$, où $z^m u$ est de nouveau une fonction intérieure.

i) On va montrer que $\psi \neq 0$. Supposons le contraire, alors $1 = 1 - 0 \in S^\perp \implies \langle 1, f \rangle = 0 \forall f \in S$. Ceci est équivalent à $f(0) = \hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) dt = 0 \forall f \in S$. Ainsi chaque élément de S aurait une racine à l'origine. Contradiction.

ii) Montrons que ψ est un multiple scalaire d'une fonction intérieure. En effet, $\psi \in S, S$ sevi, $\implies z^n \psi \in S \forall n \in \mathbb{N}^*$. Comme $1 - \psi \in S^\perp$ on obtient $0 = \langle \psi z^n, 1 - \psi \rangle =$

$$\int \psi e^{int} (1 - \bar{\psi}) d\sigma = \underbrace{\int \psi e^{int} d\sigma}_{=\widehat{\psi}(-n)=0} - \int |\psi|^2 e^{int} d\sigma = - \langle \psi z^n, \psi \rangle = \widehat{|\psi|^2}(-n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc: $0 = \overline{\langle \psi z^n, \psi \rangle} = \langle \psi, \psi z^n \rangle = \int |\psi|^2 e^{-int} d\sigma \implies \widehat{|\psi|^2}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^* \implies |\psi|^2 \equiv \text{const} = C^2$. Posons $\Phi = \frac{\psi}{C}$. Alors $|\Phi| = 1$ p.p. sur $\partial\mathbb{D}$. $\Phi \in \mathcal{H}^2 \implies \Phi$ intérieure.

iii) Montrons que $S = \Phi H^2$. (Notons que ceci est équivalent à $\psi H^2 = S$.)

a) $\psi H^2 \subseteq S$, car: soit $f \in H^2$. Les polynômes sont denses dans $H^2 \implies \exists (P_n) \in \mathbb{C}[z]$, tel que $\|P_n - f\|_2 \rightarrow 0$. S se vi, $\psi \in S \implies P_n \psi \in S$ et $\|P_n \psi - f \psi\| \rightarrow 0 \implies f \psi \in S$ car S fermé $\implies \psi H^2 \subseteq S$.

b) Pour montrer que $S = \psi H^2$, on va prouver que l'orthogonal de ψH^2 par rapport à S est $\{0\}$. Donc soit $f \in S$ et supposons que $f \perp \psi H^2$

$$\implies \langle f, \psi g \rangle = 0 \quad \forall g \in H^2 \quad (1)$$

Notons que $f \bar{\psi} \in L^1$.

Soit $g = z^n$. Alors $0 = \langle f, \psi z^n \rangle = \langle f \bar{\psi}, z^n \rangle = \widehat{f \bar{\psi}}(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$f \in S \implies z^n f \in S \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \implies z^n f \perp 1 - \psi \implies 0 = \langle z^n f, 1 - \psi \rangle = \int e^{int} f \overline{1 - \psi} d\sigma = \underbrace{\int e^{int} f d\sigma}_{=\widehat{f}(-n)=0} - \int e^{int} f \bar{\psi} d\sigma \implies \widehat{f \bar{\psi}}(n) = 0 \quad \forall n < 0 \implies \widehat{f \bar{\psi}}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \implies f \bar{\psi} = 0 \xrightarrow{|\Phi| \equiv 1} f \equiv 0. \quad \circ$$